

# 練習ドリル 数学Ⅲ

## 標準編

---

■ 解答編 ■

数研出版

<https://www.chart.co.jp>

# 練習ドリル 数学Ⅲ 標準編

## 解答編

注意 まず最初に答の数値のみを示し、続いて計算のポイント、解説を順に示した。

### 第1回

(1) 値域  $y \neq -1$ ,  $y = \frac{3}{x}$  のグラフを  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動

(2) 値域  $y \neq 2$ ,  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $1$ ,  $y$  軸方向に  $2$  だけ平行移動

(3) 値域  $y \neq -2$ ,  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $1$ ,  $y$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動

(4)  $y < \frac{1}{2}$ ,  $2 \leq y$

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad-bc \neq 0$ ) は,  $y = \frac{k}{x-p} + q$  の形に変形  
 $y = \frac{k}{x-p} + q$  のグラフは,  $y = \frac{k}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したもの

### 解説

(1)  $y = \frac{3}{x} - 1$  のグラフは,  $y = \frac{3}{x}$  のグラフを  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものである。  
 値域は  $y \neq -1$

(2)  $y = \frac{1}{x-1} + 2$  のグラフは,  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $1$ ,  $y$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものである。値域は  $y \neq 2$

$$(3) \frac{2x-3}{1-x} = \frac{-2x+3}{x-1} = \frac{-2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 2$$

よって,  $y = \frac{2x-3}{1-x}$  のグラフは,  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $1$ ,  $y$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動したものである。値域は  $y \neq -2$

$$(4) \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-2)-1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} + 1$$

よって,  $y = \frac{x-3}{x-2}$  の

グラフは,  $y = -\frac{1}{x}$  の

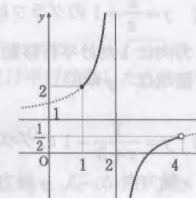
グラフを  $x$  軸方向に  $2$ ,  $y$  軸方向に  $1$  だけ平行移動したものである。

また

$$x=1 \text{ のとき } y=2$$

$$x=4 \text{ のとき } y=\frac{1}{2}$$

よって, 上の図から, 値域は  $y < \frac{1}{2}$ ,  $2 \leq y$





## 第2回

- (1) 値域  $y \neq 1$ ,  $y = \frac{2}{x}$  のグラフを  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動
- (2) 値域  $y \neq -1$ ,  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-3$ ,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動
- (3) 値域  $y \neq -1$ ,  $y = -\frac{6}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $2$ ,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動
- (4)  $y < 1$ ,  $3 \leq y$

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad-bc \neq 0$ ) は,  $y = \frac{k}{x-p} + q$  の形に変形

$y = \frac{k}{x-p} + q$  のグラフは,  $y = \frac{k}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したものである

## 解説

- (1)  $y = \frac{2}{x} + 1$  のグラフは,  $y = \frac{2}{x}$  のグラフを  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動したものである。  
値域は  $y \neq 1$
- (2)  $y = \frac{1}{x+3} - 1$  のグラフは,  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-3$ ,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものである。  
値域は  $y \neq -1$
- (3)  $\frac{x+4}{2-x} = \frac{-x-4}{x-2} = \frac{-(x-2)-6}{x-2} = -\frac{6}{x-2} - 1$   
よって,  $y = \frac{x+4}{2-x}$  のグラフは,  $y = -\frac{6}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $2$ ,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものである。  
値域は  $y \neq -1$

$$(4) \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$$

よって,  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  の

グラフは,  $y = -\frac{1}{x}$  の

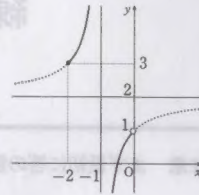
グラフを  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものである。

また

$$x = -2 \text{ のとき } y = 3$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 1$$

よって, 上の図から, 値域は  $y < 1$ ,  $3 \leq y$



## 第3回

- (1) 定義域  $x \geq 2$ , 値域  $y \geq 0$
- (2) 定義域  $x \geq -1$ , 値域  $y \leq 0$
- (3) 定義域  $x \leq 4$ , 値域  $y \geq 0$
- (4)  $1 \leq y \leq \sqrt{6}$
- (5)  $-3 < y \leq -\sqrt{3}$

$y = \sqrt{ax+b}$  ( $a \neq 0$ ) は,  $y = \sqrt{a(x-p)}$  の形に変形

$y = \sqrt{a(x-p)}$  のグラフは,  $y = \sqrt{ax}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$  だけ平行移動したものである

## 解説

- (1)  $y = \sqrt{x-2}$  のグラフは,  $y = \sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものである。  
定義域は  $x \geq 2$ , 値域は  $y \geq 0$
- (2)  $y = -\sqrt{x+1}$  のグラフは,  $y = -\sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものである。  
定義域は  $x \geq -1$ , 値域は  $y \leq 0$
- (3)  $\sqrt{4-x} = \sqrt{-(x-4)}$   
よって,  $y = \sqrt{4-x}$  のグラフは,  $y = \sqrt{-x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $4$  だけ平行移動したものである。  
定義域は  $x \leq 4$ , 値域は  $y \geq 0$
- (4)  $y = \sqrt{x+3}$  のグラフは,  $y = \sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-3$  だけ平行移動したものである。  
また  $x = -2$  のとき  $y = 1$   
 $x = 3$  のとき  $y = \sqrt{6}$   
よって, 値域は  $1 \leq y \leq \sqrt{6}$
- (5)  $-\sqrt{3x-6} = -\sqrt{3(x-2)}$   
よって,  $y = -\sqrt{3x-6}$  のグラフは,  $y = -\sqrt{3x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものである。  
また  $x = 3$  のとき  $y = -\sqrt{3}$   
 $x = 5$  のとき  $y = -3$   
よって, 値域は  $-3 < y \leq -\sqrt{3}$

## 第4回

- (1) 定義域  $x \geq -1$ , 値域  $y \geq 0$
- (2) 定義域  $x \geq 3$ , 値域  $y \leq 0$
- (3) 定義域  $x \leq 1$ , 値域  $y \geq 0$
- (4)  $1 \leq y \leq \sqrt{3}$
- (5)  $-2 < y \leq 0$

$y = \sqrt{ax+b}$  ( $a \neq 0$ ) は,  $y = \sqrt{a(x-p)}$  の形に変形

$y = \sqrt{a(x-p)}$  のグラフは,  $y = \sqrt{ax}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$  だけ平行移動したものである

## 解説

- (1)  $y = \sqrt{x+1}$  のグラフは,  $y = \sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものである。  
定義域は  $x \geq -1$ , 値域は  $y \geq 0$
- (2)  $y = -\sqrt{x-3}$  のグラフは,  $y = -\sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $3$  だけ平行移動したものである。  
定義域は  $x \geq 3$ , 値域は  $y \leq 0$
- (3)  $\sqrt{1-x} = \sqrt{-(x-1)}$   
よって,  $y = \sqrt{1-x}$  のグラフは,  $y = \sqrt{-x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $1$  だけ平行移動したものである。  
定義域は  $x \leq 1$ , 値域は  $y \geq 0$
- (4)  $y = \sqrt{x-1}$  のグラフは,  $y = \sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $1$  だけ平行移動したものである。  
また  $x = 2$  のとき  $y = 1$   
 $x = 4$  のとき  $y = \sqrt{3}$   
よって, 値域は  $1 \leq y \leq \sqrt{3}$
- (5)  $y = -\sqrt{x-2}$  のグラフは,  $y = -\sqrt{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものである。  
また  $x = 2$  のとき  $y = 0$   
 $x = 6$  のとき  $y = -2$   
よって, 値域は  $-2 < y \leq 0$



## 第5回

- (1)  $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$   
 (2)  $y = \sqrt{x-2}$   
 (3)  $y = \frac{x+2}{x-1}$   
 (4)  $y = \frac{1-x}{x} \quad (-1 \leq x < 0)$   
 (5)  $y = 3^x + 1$

- [1] 式  $y=f(x)$  を  $x=g(y)$  の形に変形する  
 [2]  $x$  と  $y$  を入れ替えて,  $y=g(x)$  とする

## 解説

- (1)  $y=3x+1$  を  $x$  について解くと

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

よって, 逆関数は  $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

- (2) この関数の値域は  $y \geq 2$

$y=x^2+2$  を  $x$  について解くと,  $x \geq 0$  であるから

$$x = \sqrt{y-2} \quad (y \geq 2)$$

よって, 逆関数は  $y = \sqrt{x-2}$

- (3)  $\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$  であるから,

この関数の値域は  $y \neq 1$  である。

$y = \frac{x+2}{x-1}$  を変形すると

$$y(x-1) = x+2$$

より  $(y-1)x = y+2$

$y \neq 1$  であるから  $x = \frac{y+2}{y-1}$

よって, 逆関数は  $y = \frac{x+2}{x-1}$

- (4) この関数の値域は  $-1 \leq y < 0$

$y = \frac{1}{x+1}$  を変形すると

$$y(x+1) = 1$$

より  $yx = 1-y$

$y \neq 0$  であるから  $x = \frac{1-y}{y}$

よって, 逆関数は  $y = \frac{1-x}{x} \quad (-1 \leq x < 0)$

- (5)  $y = \log_3(x-1)$  から  $x-1 = 3^y$

すなわち  $x = 3^y + 1$

よって, 逆関数は  $y = 3^x + 1$

## 第6回

- (1)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$   
 (2)  $y = \sqrt{1-x}$   
 (3)  $y = \frac{-x-1}{x-2}$   
 (4)  $y = \frac{-x-1}{x} \quad (-1 \leq x < 0)$   
 (5)  $y = \log_2 x$

- [1] 式  $y=f(x)$  を  $x=g(y)$  の形に変形する  
 [2]  $x$  と  $y$  を入れ替えて,  $y=g(x)$  とする

## 解説

- (1)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  を  $x$  について解くと

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

よって, 逆関数は  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

- (2) この関数の値域は  $y \leq 1$

$y = -x^2 + 1$  を  $x$  について解くと,

$$x \geq 0 \text{ であるから } x = \sqrt{1-y} \quad (y \leq 1)$$

よって, 逆関数は  $y = \sqrt{1-x}$

- (3)  $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 2$  である

から, この関数の値域は  $y \neq 2$  である。

$y = \frac{2x-1}{x+1}$  を変形すると

$$y(x+1) = 2x-1$$

より  $(y-2)x = -y-1$

$y \neq 2$  であるから  $x = \frac{-y-1}{y-2}$

よって, 逆関数は  $y = \frac{-x-1}{x-2}$

- (4) この関数の値域は  $-1 \leq y < 0$

$y = -\frac{1}{x+1}$  を変形すると

$$y(x+1) = -1$$

より  $yx = -y-1$

$y \neq 0$  であるから  $x = \frac{-y-1}{y}$

よって, 逆関数は  $y = \frac{-x-1}{x} \quad (-1 \leq x < 0)$

- (5)  $y = 2^x$  から  $x = \log_2 y$

よって, 逆関数は  $y = \log_2 x$

## 第7回

- (1)  $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 2, (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$   
 (2)  $(g \circ f)(x) = 3^{3x+1}, (f \circ g)(x) = 3^{x+1} + 1$   
 (3)  $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x^2} + 1, (f \circ g)(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$   
 (4)  $(g \circ f)(x) = \sin(5x-1), (f \circ g)(x) = 5\sin x - 1$   
 (5)  $(g \circ f)(x) = 3x, (f \circ g)(x) = x^3$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

## 解説

- (1)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1)$

$$= (2x-1)^2 + 1$$

$$= 4x^2 - 4x + 2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)$$

$$= 2(x^2 + 1) - 1$$

$$= 2x^2 + 1$$

- (2)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1)$

$$= 3^{3x+1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3^x)$$

$$= 3(3^x) + 1$$

$$= 3^{x+1} + 1$$

- (3)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{2}{x^2} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{2x^2 + 1}$$

- (4)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-1)$

$$= \sin(5x-1)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x)$$

$$= 5\sin x - 1$$

- (5)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(8^x)$

$$= \log_2 8^x$$

$$= x \log_2 8 = 3x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2 x)$$

$$= 8^{\log_2 x} = 2^{3 \log_2 x}$$

$$= 2^{\log_2 x^3} = x^3$$

$$\text{注意 } a^{\log_a P} = P$$

## 第8回

- (1)  $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x, (f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$   
 (2)  $(g \circ f)(x) = 2^{2x-1}, (f \circ g)(x) = 2^{x+1} - 1$   
 (3)  $(g \circ f)(x) = \frac{12}{x^2} + 1, (f \circ g)(x) = \frac{2}{3x^2 + 1}$   
 (4)  $(g \circ f)(x) = \cos(3x+1), (f \circ g)(x) = 3\cos x + 1$   
 (5)  $(g \circ f)(x) = \frac{x}{2}, (f \circ g)(x) = \sqrt{x}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

## 解説

- (1)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1)$

$$= (2x+1)^2 - 1$$

$$= 4x^2 + 4x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$$

$$= 2(x^2 - 1) + 1$$

$$= 2x^2 - 1$$

- (2)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1)$

$$= 2^{2x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2^x)$$

$$= 2(2^x) - 1$$

$$= 2^{x+1} - 1$$

- (3)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right)$

$$= 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{12}{x^2} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 + 1)$$

$$= \frac{2}{3x^2 + 1}$$

- (4)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1)$

$$= \cos(3x+1)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x)$$

$$= 3\cos x + 1$$

- (5)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3^x)$

$$= \log_9 3^x = x \log_9 3 = \frac{x}{2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_9 x)$$

$$= 3^{\log_9 x} = 3^{\frac{\log_3 x}{\log_3 9}}$$

$$= 3^{\log_3 \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\text{注意 } a^{\log_a P} = P$$



## 第9回

- (1)  $\infty$  に発散 (2)  $\infty$  に発散  
 (3) 振動 (4)  $\infty$  に発散  
 (5) 0 に収束 (6)  $-\infty$  に発散  
 (7)  $\infty$  に発散 (8) 振動  
 (9) 振動 (10) 0 に収束

収束	極限は一定の値	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$
発散	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
	負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
	振動…極限はない	

解説 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-4) = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(3)  $a_n = (-1)^n \cdot 3$  とおくと,  $a_{2n} = 3, a_{2n-1} = -3$   
 $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_{2n} \rightarrow 3, a_{2n-1} \rightarrow -3$   
 よって, 振動。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2^n} = 0$  から, 0 に収束。

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{n^2}{5}) = -\infty$  から,  $-\infty$  に発散。

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n} = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(8)  $a_n = \frac{n}{(-1)^n}$  とおくと,  $a_{2n} = 2n,$   
 $a_{2n-1} = -(2n-1)$   
 $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_{2n} \rightarrow \infty, a_{2n-1} \rightarrow -\infty$   
 よって, 振動。

(9)  $a_n = (-3)^{n-1}$  とおくと,  
 $a_{2n} = -3^{2n-1}, a_{2n-1} = 3^{2n-2}$   
 $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_{2n} \rightarrow -\infty, a_{2n-1} \rightarrow \infty$   
 よって, 振動。

(10)  $\sin n\pi = 0$  から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$   
 よって, 0 に収束。

## 第10回

- (1)  $\infty$  に発散 (2)  $-\infty$  に発散  
 (3) 振動 (4)  $\infty$  に発散  
 (5) 0 に収束 (6)  $-\infty$  に発散  
 (7)  $\infty$  に発散 (8) 振動  
 (9) 振動 (10) 0 に収束

収束	極限は一定の値	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$
発散	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
	負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
	振動…極限はない	

解説 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n-1) = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (7-n^2) = -\infty$  から,  $-\infty$  に発散。

(3)  $a_n = -2 \cdot (-1)^n$  とおくと,  $a_{2n} = -2,$   
 $a_{2n-1} = 2$   
 $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_{2n} \rightarrow -2, a_{2n-1} \rightarrow 2$   
 よって, 振動。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3^n} = 0$  から, 0 に収束。

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{n}{2}) = -\infty$  から,  $-\infty$  に発散。

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$  から,  $\infty$  に発散。

(8)  $a_n = 1 - (-1)^n$  とおくと,  $a_{2n} = 0, a_{2n-1} = 2$   
 $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_{2n} \rightarrow 0, a_{2n-1} \rightarrow 2$   
 よって, 振動。

(9)  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2$  とおくと,  
 $a_{2n} = -(2n)^2, a_{2n-1} = (2n-1)^2$   
 $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_{2n} \rightarrow -\infty, a_{2n-1} \rightarrow \infty$   
 よって, 振動。

(10)  $\tan n\pi = 0$  から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan n\pi = 0$   
 よって, 0 に収束。

## 第11回

- (1)  $\infty$  (2)  $-\infty$  (3) 2  
 (4)  $\frac{3}{2}$  (5) 3 (6)  $\frac{5}{3}$  (7)  $\frac{7}{3}$   
 (8) 0 (9)  $\infty$  (10) -2

多項式…最高次の項でくり出す

分数式…分母の最高次の項で分母・分子を割る

## 解説

(1) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 - \frac{3}{n} \right) = \infty$

(2) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( -2 + \frac{5}{n^2} \right) = -\infty$

(3) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$

(4) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$

(5) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 - \frac{4}{n^2}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$

(6) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{5-0+0}{3+0} = \frac{5}{3}$

(7) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}}{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = \frac{7+0+0}{3-0+0} = \frac{7}{3}$

(8) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$

(9) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{6}{n}}{3 - \frac{5}{n}} = \infty$

(10) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{-4+0}{2-0} = -2$

## 第12回

- (1)  $\infty$  (2)  $-\infty$  (3)  $\frac{1}{4}$   
 (4)  $\frac{2}{5}$  (5)  $\frac{1}{2}$  (6) 4 (7)  $\frac{5}{6}$   
 (8) 0 (9)  $-\infty$  (10) -1

多項式…最高次の項でくり出す

分数式…分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説 (1) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 2 - \frac{7}{n} \right) = \infty$

(2) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( -1 + \frac{3}{n^2} \right) = -\infty$

(3) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n}}{4 - \frac{3}{n}} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}$

(4) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}$

(5) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$

(6) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{4}{n^2}} = \frac{4+0-0}{1-0} = 4$

(7) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{6 + \frac{1}{n}} = \frac{5-0+0}{6+0} = \frac{5}{6}$

(8) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{0-0}{2-0} = 0$

(9) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n + \frac{2}{n}}{1 + \frac{9}{n}} = -\infty$

(10) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n-8}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{8}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{-3-0}{3-0} = -1$



## 第13回

- (1) 0  
(2) 2  
(3)  $\infty$   
(4) 0  
(5) 1

分数式 … 分母の最高次の項で分母・分子を割る  
無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

$$(1) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1 - \frac{2}{n}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(2) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + 1} = \frac{4}{1+1} = 2$$

$$(3) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(n+1) - n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$$

$$(4) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n-2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n-2} + \sqrt{n+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2) - (n+1)}{\sqrt{n-2} + \sqrt{n+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{n-2} + \sqrt{n+1}} = 0$$

$$(5) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n-1} - n)(\sqrt{n^2+2n-1} + n)}{\sqrt{n^2+2n-1} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+2n-1) - n^2}{\sqrt{n^2+2n-1} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

## 第14回

- (1) 0  
(2) 3  
(3)  $\infty$   
(4) 0  
(5)  $\frac{3}{2}$

分数式 … 分母の最高次の項で分母・分子を割る  
無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

$$(1) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(2) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} = \frac{6}{1+1} = 3$$

$$(3) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})}{(n+3) - (n+1)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}) = \infty$$

$$(4) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$(5) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n} - n)(\sqrt{n^2+3n} + n)}{\sqrt{n^2+3n} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+3n) - n^2}{\sqrt{n^2+3n} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n} + n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

## 第15回

- (1) 0に収束 (2)  $\infty$ に発散  
(3) 0に収束 (4) 振動  
(5) 0に収束 (6) 振動  
(7) 振動 (8) 0に収束  
(9) 振動 (10) 振動

無限等比数列  $\{r^n\}$  の極限

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$$

$$|r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$r \leq -1 \text{ のとき 振動} \cdots \cdots \text{極限はない}$$

解説

$$(1) \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(2) \frac{4}{3} > 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3} \right)^n = \infty \\ \text{よって, } \infty \text{に発散する。}$$

$$(3) \left| -\frac{1}{6} \right| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{6} \right)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(4) -\frac{5}{4} < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$

$$(5) 0.31 < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} (0.31)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(6) -5.23 < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$

$$(7) \text{振動する。}$$

$$(8) \left| \frac{1}{4} \right| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = 0 \\ \text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 3 \left( \frac{1}{4} \right)^n \right] = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(9) -\frac{5}{2} < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$

$$(10) -\frac{7}{5} < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$

## 第16回

- (1) 0に収束 (2)  $\infty$ に発散  
(3) 0に収束 (4) 振動  
(5)  $\infty$ に発散 (6) 0に収束  
(7) 0に収束 (8) 振動  
(9) 振動 (10) 振動

無限等比数列  $\{r^n\}$  の極限

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$$

$$|r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$r \leq -1 \text{ のとき 振動} \cdots \cdots \text{極限はない}$$

解説

$$(1) \left| \frac{1}{3} \right| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(2) \frac{3}{2} > 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n = \infty \\ \text{よって, } \infty \text{に発散する。}$$

$$(3) \left| -\frac{1}{4} \right| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{4} \right)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(4) -\frac{7}{6} < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$

$$(5) 1.38 > 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} (1.38)^n = \infty \\ \text{よって, } \infty \text{に発散する。}$$

$$(6) |-0.99| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} (-0.99)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(7) \left| \frac{1}{5} \right| < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} \right)^n = 0 \\ \text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 4 \left( \frac{1}{5} \right)^n \right] = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} \right)^n = 0 \\ \text{よって, 0に収束する。}$$

$$(8) \text{振動する。}$$

$$(9) -\frac{4}{3} < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$

$$(10) -\frac{5}{2} < -1 \text{ であるから, 振動する。}$$



## 第17回

- (1) 2 (2)  $\frac{1}{3}$   
 (3) -4 (4) 0  
 (5)  $\infty$  (6)  $-\infty$   
 (7)  $-\infty$  (8) 1  
 (9) 0 (10)  $\infty$

分母の最高次の項で分母・分子を割る  
最高次の項でくり出す

## 解説

- (1) (与式)=2  
 (2) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) = \frac{1}{3}$   
 (3) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4^n} - 4 \right) = -4$   
 (4) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{2}{4^n}} = \frac{0}{1-0} = 0$   
 (5) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{5}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \infty$   
 (6) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{3^n} - \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3^n}} = -\infty$   
 (7) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{3}\right)^n \right\} = -\infty$   
 (8) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$   
 (9) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{5}{4^n}} = \frac{0}{1-0} = 0$   
 (10) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \infty$

## 第18回

- (1) 4 (2) 1  
 (3) -9 (4) 0  
 (5)  $\infty$  (6)  $-\infty$   
 (7)  $\infty$  (8) -1  
 (9) 0 (10)  $-\infty$

分母の最高次の項で分母・分子を割る  
最高次の項でくり出す

## 解説

- (1) (与式)=4  
 (2) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{4^n} \right) = 1$   
 (3) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3^n} - 9 \right) = -9$   
 (4) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3^n}} = \frac{0}{1+0} = 0$   
 (5) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{2}{4^n}}{1 - \frac{1}{4^n}} = \infty$   
 (6) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{2^n} - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2^n}} = -\infty$   
 (7) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} = \infty$   
 (8) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{0-1}{1+0} = -1$   
 (9) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{0}{1+0} = 0$   
 (10) (与式)= $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 \right\} = -\infty$

## 第19回

- (1) 発散  
 (2) 収束,  $-\frac{16}{3}$   
 (3) 発散  
 (4) 発散  
 (5) 収束,  $\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$

無限等比級数  $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$

$a \neq 0$  の場合  $|r| < 1$  のとき収束し, 和は  $\frac{a}{1-r}$   
 $|r| \geq 1$  のとき 発散  
 $a = 0$  の場合収束し, 和は 0

## 解説

- (1) 初項は 1, 公比は  $r=3$   
 $|r| > 1$  であるから, この無限等比級数は発散する。  
 (2) 初項は -8, 公比は  $r=-\frac{1}{2}$  で  $|r| < 1$   
 よって, この無限等比級数は収束し, その和  $S$  は  

$$S = \frac{-8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{16}{3}$$
  
 (3) 初項は  $\sqrt{2}$ , 公比は  $r=\sqrt{2}$   
 $|r| > 1$  であるから, この無限等比級数は発散する。  
 (4) 初項は -3, 公比は  $r=-1$  であるから, この無限等比級数は発散する。  
 (5) 初項は  $3+\sqrt{2}$ , 公比は  

$$r = \frac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2}-1$$
 $|r| < 1$  であるから, この無限等比級数は収束し, その和  $S$  は

$$S = \frac{3+\sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{8+5\sqrt{2}}{2}$$

## 第20回

- (1) 収束,  $-\frac{2}{3}$   
 (2) 収束, 10  
 (3) 収束,  $\frac{81}{4}$   
 (4) 発散  
 (5) 収束, 1

無限等比級数  $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$

$a \neq 0$  の場合  $|r| < 1$  のとき収束し, 和は  $\frac{a}{1-r}$   
 $|r| \geq 1$  のとき 発散  
 $a = 0$  の場合収束し, 和は 0

## 解説

- (1) 初項は -1, 公比は  $r=-\frac{1}{2}$  で  $|r| < 1$   
 よって, この無限等比級数は収束し, その和  $S$  は  

$$S = \frac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}$$
  
 (2) 初項は 1, 公比は  $r=0.9$  で  $|r| < 1$   
 よって, この無限等比級数は収束し, その和  $S$  は  

$$S = \frac{1}{1 - 0.9} = \frac{1}{0.1} = 10$$
  
 (3) 初項は 27, 公比は  $r=-\frac{1}{3}$  で  $|r| < 1$   
 よって, この無限等比級数は収束し, その和  $S$  は  

$$S = \frac{27}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{81}{4}$$
  
 (4) 初項は 2, 公比は  $r=\sqrt{3}$   
 $|r| > 1$  であるから, この無限等比級数は発散する。  
 (5) 初項は  $2-\sqrt{2}$ , 公比は  

$$r = \frac{3\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2}-4)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2}-1$$
 $|r| < 1$  であるから, この無限等比級数は収束し, その和  $S$  は  

$$S = \frac{2-\sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1$$



## 第21回

- (1)  $\frac{3}{2}$  (2)  $\frac{12}{5}$  (3)  $\frac{3}{4}$  (4)  $\frac{16}{5}$

無限等比級数  $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$

$a \neq 0$  の場合  $|r| < 1$  のとき収束し、和は  $\frac{a}{1-r}$

$|r| \geq 1$  のとき 発散

$a=0$  の場合収束し、和は 0

**解説** (1) 初項は 1, 公比は  $r=\frac{1}{3}$  で  $|r| < 1$

よって、この無限等比級数は収束し、その和  $S$  は

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

(2) 初項は 3, 公比は  $r=-\frac{1}{4}$  で  $|r| < 1$

よって、この無限等比級数は収束し、その和  $S$  は

$$S = \frac{3}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{12}{5}$$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$  は、ともに公比の絶対値が 1

より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって、求める和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(4) (与式)  $= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right]$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$  は、ともに公比の絶対値が

1 より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって、求める和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} - \frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

## 第22回

- (1)  $\frac{5}{4}$  (2)  $6(2+\sqrt{3})$  (3)  $\frac{3}{4}$  (4)  $\frac{1}{2}$

無限等比級数  $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$

$a \neq 0$  の場合  $|r| < 1$  のとき収束し、和は  $\frac{a}{1-r}$

$|r| \geq 1$  のとき 発散

$a=0$  の場合収束し、和は 0

**解説** (1) 初項は 1, 公比は  $r=\frac{1}{5}$  で  $|r| < 1$

よって、この無限等比級数は収束し、その和  $S$  は

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

(2) 初項は 3, 公比は  $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$  で  $|r| < 1$

よって、この無限等比級数は収束し、その和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{2-\sqrt{3}} = \frac{6(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= 6(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$  は、ともに公比の絶対値が 1

より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって、求める和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(4) (与式)  $= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \right]$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$  は、ともに公比の絶対値が

1 より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって、求める和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 第23回

- (1) 10  
(2) 7  
(3) 17  
(4) -2  
(5)  $-\frac{1}{2}$   
(6)  $-\frac{1}{3}$   
(7) 3  
(8) 1  
(9) 0  
(10) 3

$x$  の多項式で表される関数、分数関数、無理関数、三角関数、指数関数、対数関数などの関数  $f(x)$  については、 $a$  が関数の定義域に属するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**解説**

(1) (与式)  $= 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$

(2) (与式)  $= (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 4 = 7$

(3) (与式)  $= 3^3 - 3 \cdot 3 - 1 = 17$

(4) (与式)  $= (1+1) \cdot (2 \cdot 1 - 3) = -2$

(5) (与式)  $= \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$

(6) (与式)  $= \frac{(-2) + 3}{\{(-2) - 1\} \{(-2)^2 - 3\}} = -\frac{1}{3}$

(7) (与式)  $= \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = \sqrt{9} = 3$

(8) (与式)  $= 3^0 = 1$

(9) (与式)  $= \log_3 1 = 0$

(10) (与式)  $= \log_2 8 = 3$

## 第24回

- (1) 6  
(2) -12  
(3) 17  
(4) 4  
(5)  $\frac{1}{2}$   
(6) 2  
(7)  $2\sqrt{2}$   
(8) 2  
(9) 0  
(10) 2

$x$  の多項式で表される関数、分数関数、無理関数、三角関数、指数関数、対数関数などの関数  $f(x)$  については、 $a$  が関数の定義域に属するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**解説**

(1) (与式)  $= 2 \cdot 2^2 - 2 = 6$

(2) (与式)  $= (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 8 = -12$

(3) (与式)  $= 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 + 1 = 17$

(4) (与式)  $= (2 \cdot 0 - 1)(3 \cdot 0 - 4) = 4$

(5) (与式)  $= \frac{1 - 2 \cdot 1}{1 - 3} = \frac{1}{2}$

(6) (与式)  $= \frac{(-1) - 3}{\{(-1) + 2\} \{(-1)^2 - 3\}} = 2$

(7) (与式)  $= \sqrt{3 \cdot 3 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(8) (与式)  $= 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

(9) (与式)  $= \log_2 1 = 0$

(10) (与式)  $= \log_3 9 = 2$



## 第25回

- (1) 2  
 (2) 2  
 (3)  $-\frac{1}{4}$   
 (4)  $\frac{7}{5}$   
 (5)  $-\frac{8}{3}$   
 (6) 12  
 (7)  $\frac{4}{27}$   
 (8) 6  
 (9) -1  
 (10)  $-\frac{3}{2}$

分数式…約分をする

## 解説

- (1) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$   
 (2) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$   
 (3) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+3} = -\frac{1}{4}$   
 (4) (与式)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{7}{5}$   
 (5) (与式)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(3x-1)(x-3)}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x-3) = -\frac{8}{3}$   
 (6) (与式)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2-2x+4) = 12$   
 (7) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2+3x+9} = \frac{4}{27}$   
 (8) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+6) = 6$   
 (9) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-1}{x} = -1$   
 (10) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{6-3(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x+2} = -\frac{3}{2}$

## 第26回

- (1) -3  
 (2)  $\frac{1}{2}$   
 (3)  $\frac{5}{4}$   
 (4)  $\frac{7}{3}$   
 (5)  $\frac{1}{2}$   
 (6) 27  
 (7)  $\frac{5}{12}$   
 (8) -2  
 (9)  $-\frac{1}{4}$   
 (10) -2

分数式…約分をする

## 解説

- (1) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-3) = -3$   
 (2) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$   
 (3) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{4}$   
 (4) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{7}{3}$   
 (5) (与式)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(x+1)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x+1) = \frac{1}{2}$   
 (6) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2+3x+9) = 27$   
 (7) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2+2x+4} = \frac{5}{12}$   
 (8) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2$   
 (9) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-x+2} = -\frac{1}{4}$   
 (10) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{2+2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x-1} = -2$

## 第27回

- (1)  $\frac{3}{4}$  (2) -6  
 (3)  $-\frac{3}{2}$  (4) -7

無理式…分母または分子を有理化する

## 解説

- (1) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-(x+2)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{3}{4}$   
 (2) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}{(3-\sqrt{x+8})(3+\sqrt{x+8})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}{9-(x+8)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \{-(3+\sqrt{x+8})\} = -6$   
 (3) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2x)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+3)-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = -\frac{3}{2}$   
 (4) (与式)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{(-2x-\sqrt{3-x})(-2x+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)} \times \frac{(\sqrt{x+5}+2)}{(-2x+\sqrt{3-x})} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2-(3-x)}{(x+5)-4} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+2}{-2x+\sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+2}{-2x+\sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(4x-3)(\sqrt{x+5}+2)}{-2x+\sqrt{3-x}} = -7$

## 第28回

- (1)  $\frac{1}{3}$  (2) 4  
 (3) 1 (4) -4

無理式…分母または分子を有理化する

## 解説

- (1) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-\sqrt{4x-3})(x+\sqrt{4x-3})}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-(4x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-(4x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{3}$   
 (2) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) = 4$   
 (3) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x^2-4}-x)(\sqrt{2x^2-4}+x)}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2-4)-x^2}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2-4)-x^2}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)-(x^2)}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{2x^2-4}+x} = 1$   
 (4) (与式)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x-\sqrt{4x-3})(x+\sqrt{4x-3})}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} \times \frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(x+\sqrt{4x-3})} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-(4x-3)}{(x+3)-4} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{x+\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-(4x-3)}{(x+3)-4} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{x+\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{x+\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+2)}{x+\sqrt{4x-3}} = -4$



## 第29回

- (1)  $\infty$   
 (2)  $\infty$   
 (3)  $-\infty$   
 (4)  $\infty$   
 (5)  $-\infty$   
 (6) 0  
 (7) -3  
 (8) -2

右側極限  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$   
 左側極限  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

## 解説

(1) (与式) =  $\infty$

(2) (与式) =  $\infty$

(3) (与式) =  $-\infty$

(4) (与式) =  $\infty$

(5) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x(x-2)} = -\infty$

(6) (与式) = 0

(7)  $x \rightarrow -0$ であるから  $x < 0$

よって (与式) =  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{3x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -0} (-3) = -3$

(8)  $x \rightarrow 1+0$ であるから  $x > 1$

よって (与式) =  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x(1-x)}{-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-2x) = -2$

## 第30回

- (1)  $\infty$   
 (2)  $\infty$   
 (3)  $-\infty$   
 (4)  $-\infty$   
 (5)  $-\infty$   
 (6) 0  
 (7)  $\frac{1}{4}$   
 (8) 1

右側極限  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$   
 左側極限  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

## 解説

(1) (与式) =  $\infty$

(2) (与式) =  $\infty$

(3) (与式) =  $-\infty$

(4) (与式) =  $-\infty$

(5) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{-x(x-1)} = -\infty$

(6) (与式) = 0

(7)  $x \rightarrow +0$ であるから  $x > 0$

よって (与式) =  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(8)  $x \rightarrow -2-0$ であるから  $x < -2$

よって (与式) =  $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x(x+2)}{-2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \left(-\frac{x}{2}\right) = 1$

## 第31回

- (1) 0  
 (2) 0  
 (3) 3  
 (4) 3  
 (5) 2  
 (6)  $-\infty$   
 (7)  $-\infty$   
 (8)  $\infty$   
 (9)  $\infty$   
 (10)  $\infty$

多項式…最高次の項でくくり出す

## 解説

(1) (与式) = 0

(2) (与式) = 0

(3) (与式) = 3

(4) (与式) =  $1 \cdot 3 = 3$

(5) (与式) =  $1 \cdot 2 = 2$

(6) (与式) =  $-\infty$

(7) (与式) =  $-\infty$

(8) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = \infty$

(9) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 2\right) = \infty$

(10) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right) = \infty$

## 第32回

- (1) 0  
 (2) 0  
 (3) 1  
 (4) 2  
 (5) 3  
 (6)  $\infty$   
 (7)  $-\infty$   
 (8)  $\infty$   
 (9)  $\infty$   
 (10)  $-\infty$

多項式…最高次の項でくくり出す

## 解説

(1) (与式) = 0

(2) (与式) = 0

(3) (与式) = 1

(4) (与式) =  $2 \cdot 1 = 2$

(5) (与式) =  $3 \cdot 1 = 3$

(6) (与式) =  $\infty$

(7) (与式) =  $-\infty$

(8) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2}\right) = \infty$

(9) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) = \infty$

(10) (与式) =  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(-1 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$



## 第33回

- (1) 0  
 (2) 0  
 (3) 3  
 (4)  $-\frac{1}{2}$   
 (5)  $-\infty$

分数式…分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説

$$(1) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$$

$$(2) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}} = 0$$

$$(3) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 3$$

$$(4) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$(5) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 + \frac{3}{x}}{-3 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

## 第34回

- (1) 0  
 (2) 0  
 (3) -2  
 (4)  $-\frac{1}{3}$   
 (5)  $-\infty$

分数式…分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説

$$(1) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$(2) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}} = 0$$

$$(3) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = -2$$

$$(4) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$(5) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

## 第35回

- (1) 0  
 (2)  $\frac{1}{2}$   
 (3) 2  
 (4) 2

無理式…分母または分子を有理化する

解説

(1) (与式)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

(2) (与式)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2 - \sqrt{x^2+3x})(x+2 + \sqrt{x^2+3x})}{x+2 + \sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - (x^2+3x)}{x+2 + \sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x+2 + \sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{2}$$

(3) (与式)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-2}}{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-2})} \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-2})} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-2}}{(x^2+x) - (x^2-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-2}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$$

(4)  $x = -t$  とおくと  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $t \rightarrow \infty$ 

よって

(与式)

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+t+1} - \sqrt{t^2+1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+t+1} + \sqrt{t^2+1}}{(t^2+t+1) - (t^2+1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+t+1} + \sqrt{t^2+1}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \right) = 2$$

別解

(与式)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+1}}{(x^2-x+1) - (x^2+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+1}}{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 2$$



## 第36回

- (1) 0  
 (2)  $\frac{1}{2}$   
 (3)  $\frac{2}{3}$   
 (4)  $-\frac{2}{3}$

無理式…分母または分子を有理化する

解説

(1) (与式)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3) - x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 0
 \end{aligned}$$

(2) (与式)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1 - \sqrt{x^2-3x})(x-1 + \sqrt{x^2-3x})}{x-1 + \sqrt{x^2-3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2 - (x^2-3x)}{x-1 + \sqrt{x^2-3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1 + \sqrt{x^2-3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(3) (与式)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1})} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1})} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}}{(x^2+3x) - (x^2+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}}{3x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(4)  $x=-t$ とおくと  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $t \rightarrow \infty$ 

よって

(与式)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t^2+3t+1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+4} + \sqrt{t^2+3t+1}}{(t^2+4) - (t^2+3t+1)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+4} + \sqrt{t^2+3t+1}}{-3t+3} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}}{-3+\frac{3}{t}} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

別解

(与式)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-3x+1}}{(x^2+4) - (x^2-3x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-3x+1}}{3x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})} + \sqrt{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}{3x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{3}{x}} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

## 第37回

- (1)  $\infty$  (2) 0  
 (3)  $\infty$  (4)  $\infty$   
 (5)  $-\infty$  (6)  $-\infty$   
 (7)  $\infty$  (8)  $\infty$   
 (9) 0 (10) 2

 $a > 1$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$

 $0 < a < 1$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$$

解説

(1) (与式)  $= \infty$ (2) (与式)  $= 0$ (3) (与式)  $= \infty$ (4) (与式)  $= \infty$ (5) (与式)  $= -\infty$ (6) (与式)  $= -\infty$ (7) (与式)  $= \infty$ 

$$(8) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5^x \left[ 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^x \right] = \infty$$

$$(9) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( \frac{5}{3} \right)^x}{1 + \left( \frac{4}{3} \right)^x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (10) \text{ (与式)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9x+1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left( 9 + \frac{1}{x} \right) \\
 &= \log_3 9 = 2
 \end{aligned}$$

## 第38回

- (1) 0 (2) 0  
 (3)  $\infty$  (4)  $\infty$   
 (5)  $-\infty$  (6)  $-\infty$   
 (7)  $\infty$  (8)  $-\infty$   
 (9)  $\infty$  (10) 2

 $a > 1$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$

 $0 < a < 1$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$$

解説

(1) (与式)  $= 0$ (2) (与式)  $= 0$ (3) (与式)  $= \infty$ (4) (与式)  $= \infty$ (5) (与式)  $= -\infty$ (6) (与式)  $= -\infty$ (7) (与式)  $= \infty$ 

$$(8) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5^x \left[ \left( \frac{3}{5} \right)^x - 1 \right] = -\infty$$

$$(9) \text{ (与式)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{5}{4} \right)^x}{1 - \left( \frac{3}{4} \right)^x} = \infty$$

$$\begin{aligned}
 (10) \text{ (与式)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x^2+1}{x^2+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} \\
 &= \log_2 4 = 2
 \end{aligned}$$



## 第39回

- (1) 3                      (2)  $\frac{1}{4}$                       (3) 2  
 (4) 0                      (5)  $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

(角の単位はラジアン)

解説

(1) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$

(2) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{1}{4}$   
 $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(3) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 2 \cos x$   
 $= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

(4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\sin x(\cos x + 1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x(\cos x + 1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x + 1)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = 0$

(5)  $x - \frac{\pi}{2} = t$  とおくと  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって

(与式)  $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{2t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{2t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t}{t}\right)$   
 $= -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

## 第40回

- (1)  $\frac{4}{5}$                       (2)  $\frac{1}{3}$                       (3) -1  
 (4)  $\frac{1}{2}$                       (5) -2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

(角の単位はラジアン)

解説

(1) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{5} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$

(2) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x}$   
 $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

(3) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right)$   
 $= 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1$

(4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

(別解) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1 + \cos x)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

(5)  $x - \frac{\pi}{2} = t$  とおくと  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって

(与式)  $= \lim_{t \rightarrow 0} 2t \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} 2t \left(-\frac{1}{\tan t}\right)$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \left(\frac{t}{\sin t}\right) \cdot (-\cos t) = 2 \cdot 1 \cdot (-1)$   
 $= -2$

## 第41回

- (1)  $-\infty$   
 (2)  $\infty$   
 (3)  $-\frac{1}{2}$   
 (4) 1  
 (5) 3

解説

(1) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} - 1 \right) = -\infty$

(2) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}} = \infty$

(3) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - (x + 2)}{x + 2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x + 2} \right) = -\frac{1}{2}$

(4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 1}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 1}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$   
 $= 1$

(5) (与式)  
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin x}{\sin 2x} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5}{2} + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \right)$   
 $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$

## 第42回

- (1) 2  
 (2)  $\frac{3}{2}$   
 (3)  $\frac{5}{6}$   
 (4)  $\infty$   
 (5) 2

解説

(1) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 2$

(2) (与式)  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \{ (n+2) - (n-1) \}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}$

(3) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x+5} = \frac{5}{6}$

(4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \infty$

(5) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x} - \frac{\sin x}{x} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} \right)$   
 $= 3 \cdot 1 - 1 = 2$



## 第43回

- (1)  $7x^6$  (2)  $-30x^5$   
 (3)  $5x^4-6x^2$   
 (4)  $10x^4+4x^3+18x^2+14x+8$   
 (5)  $2x^5-5x^4+6x^3-12x^2-9$   
 (6)  $-3x^{-4}$  (7)  $20x^{-6}$   
 (8)  $-\frac{7}{x^6}$  (9)  $4x^3-\frac{3}{x^4}$   
 (10)  $\frac{2x^3-6}{x^3}$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は整数})$$

$$\{kf(x)+lg(x)\}' = kf'(x)+lg'(x)$$

## 解説

- (1)  $y' = 7x^6$   
 (2)  $y' = -5 \cdot 6x^5 = -30x^5$   
 (3)  $y' = 5x^4 - 2 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 6x^2$   
 (4)  $y' = 2 \cdot 5x^4 + 4x^3 + 6 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x + 8$   
 $= 10x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 14x + 8$   
 (5)  $y' = \frac{1}{3} \cdot 6x^5 - 5x^4 + \frac{3}{2} \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 - 9$   
 $= 2x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 9$   
 (6)  $y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} \left( = -\frac{3}{x^4} \right)$   
 (7)  $y' = -4(-5x^{-5-1}) = 20x^{-6} \left( = \frac{20}{x^6} \right)$   
 (8)  $y = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$   
 よって  $y' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$   
 (9)  $y = x^4 + \frac{1}{x^3} = x^4 + x^{-3}$   
 よって  $y' = 4x^3 - 3x^{-3-1} = 4x^3 - 3x^{-4}$   
 $= 4x^3 - \frac{3}{x^4}$   
 (10)  $y = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2} = 2x-1+\frac{3}{x^2}$   
 $= 2x-1+3x^{-2}$   
 よって  $y' = 2+3(-2x^{-2-1}) = 2-6x^{-3}$   
 $= 2 - \frac{6}{x^3} = \frac{2x^3-6}{x^3}$

## 第44回

- (1)  $8x^7$  (2)  $15x^4$   
 (3)  $-6x^5+12x^3$   
 (4)  $-12x^3+6x^2+10x-7$   
 (5)  $2x^4+2x^3-2x^2-2x$   
 (6)  $4x^{-5}$  (7)  $-35x^{-8}$   
 (8)  $\frac{5}{x^6}$  (9)  $12x^2+\frac{2}{x^3}$   
 (10)  $-\frac{x^2+2x+6}{x^4}$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は整数})$$

$$\{kf(x)+lg(x)\}' = kf'(x)+lg'(x)$$

## 解説

- (1)  $y' = 8x^7$   
 (2)  $y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$   
 (3)  $y' = -6x^5 + 3 \cdot 4x^3 = -6x^5 + 12x^3$   
 (4)  $y' = -3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 7$   
 $= -12x^3 + 6x^2 + 10x - 7$   
 (5)  $y' = \frac{2}{5} \cdot 5x^4 + \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 2x$   
 $= 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x$   
 (6)  $y' = -(-4x^{-4-1}) = 4x^{-5} \left( = \frac{4}{x^5} \right)$   
 (7)  $y' = 5(-7x^{-7-1}) = -35x^{-8} \left( = -\frac{35}{x^8} \right)$   
 (8)  $y = -\frac{1}{x^5} = -x^{-5}$   
 よって  $y' = -(-5x^{-5-1}) = 5x^{-6} = \frac{5}{x^6}$   
 (9)  $y = 4x^3 - \frac{1}{x^2} = 4x^3 - x^{-2}$   
 よって  $y' = 4 \cdot 3x^2 - (-2x^{-2-1}) = 12x^2 + 2x^{-3}$   
 $= 12x^2 + \frac{2}{x^3}$   
 (10)  $y = \frac{x^2-x-2}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$   
 $= x^{-1} - x^{-2} - 2x^{-3}$   
 よって  
 $y' = -x^{-1-1} - (-2x^{-2-1}) - 2(-3x^{-3-1})$   
 $= -x^{-2} + 2x^{-3} + 6x^{-4}$   
 $= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} = \frac{-x^2+2x+6}{x^4}$

## 第45回

- (1)  $6x^2-2x+8$   
 (2)  $12x^3+45x^2+14x+5$   
 (3)  $5x^4-3x^2-20$   
 (4)  $5x^4+12x^3-3x^2-4x-3$   
 (5)  $6x^5-5x^4-21x^2+22x-4$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

## 解説

- (1)  $y' = (x^2+4)'(2x-1) + (x^2+4)(2x-1)'$   
 $= 2x(2x-1) + (x^2+4) \cdot 2$   
 $= 6x^2 - 2x + 8$   
 (2)  $y' = (3x^2+1)'(x^2+5x+2) + (3x^2+1)(x^2+5x+2)'$   
 $= 6x(x^2+5x+2) + (3x^2+1)(2x+5)$   
 $= 12x^3 + 45x^2 + 14x + 5$   
 (3)  $y' = (x^3+4x)'(x^2-5) + (x^3+4x)(x^2-5)'$   
 $= (3x^2+4)(x^2-5) + (x^3+4x) \cdot 2x$   
 $= 5x^4 - 3x^2 - 20$   
 (4)  $y' = (x+1)'(x^4+2x^3-3x^2+x-4) + (x+1)(x^4+2x^3-3x^2+x-4)'$   
 $= 1 \cdot (x^4+2x^3-3x^2+x-4) + (x+1)(4x^3+6x^2-6x+1)$   
 $= 5x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 4x - 3$   
 (5)  $y' = (x^2-x)'(x^4-7x+4) + (x^2-x)(x^4-7x+4)'$   
 $= (2x-1)(x^4-7x+4) + (x^2-x)(4x^3-7)$   
 $= 6x^5 - 5x^4 - 21x^2 + 22x - 4$

## 第46回

- (1)  $9x^2+4x-9$   
 (2)  $8x^3-18x^2+14x+3$   
 (3)  $5x^4+9x^2-4$   
 (4)  $10x^4-4x^3+30x^2-10x-6$   
 (5)  $6x^5+5x^4-9x^2-4x+1$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

## 解説

- (1)  $y' = (3x+2)'(x^2-3) + (3x+2)(x^2-3)'$   
 $= 3 \cdot (x^2-3) + (3x+2) \cdot 2x$   
 $= 9x^2 + 4x - 9$   
 (2)  $y' = (2x^2-1)'(x^2-3x+4) + (2x^2-1)(x^2-3x+4)'$   
 $= 4x(x^2-3x+4) + (2x^2-1)(2x-3)$   
 $= 8x^3 - 18x^2 + 14x + 3$   
 (3)  $y' = (x^3-x)'(x^2+4) + (x^3-x)(x^2+4)'$   
 $= (3x^2-1)(x^2+4) + (x^3-x) \cdot 2x$   
 $= 5x^4 + 9x^2 - 4$   
 (4)  $y' = (2x-1)'(x^4+5x^2-3) + (2x-1)(x^4+5x^2-3)'$   
 $= 2 \cdot (x^4+5x^2-3) + (2x-1)(4x^3+10x)$   
 $= 10x^4 - 4x^3 + 30x^2 - 10x - 6$   
 (5)  $y' = (x^2+x)'(x^4-3x+1) + (x^2+x)(x^4-3x+1)'$   
 $= (2x+1)(x^4-3x+1) + (x^2+x)(4x^3-3)$   
 $= 6x^5 + 5x^4 - 9x^2 - 4x + 1$



## 第47回

- (1)  $-\frac{4x}{(x^2+3)^2}$
- (2)  $-\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{4x}{(x^2-5)^2}$
- (3)  $\frac{-x^2+2x-3}{(x^2+2x-5)^2}$
- (4)  $\frac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$
- (5)  $\frac{-3x^4+8x^2+15}{(x^4-8x^2+15)^2}$

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

特に  $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

## 解説

- (1)  $y' = -\frac{2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = -\frac{4x}{(x^2+3)^2}$
- (2)  $y' = -\frac{(x+2)'}{(x+2)^2} - \frac{2(x^2-5)'}{(x^2-5)^2}$   
 $= -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{4x}{(x^2-5)^2}$
- (3)  $y' = \frac{(x-1)'(x^2+2x-5) - (x-1)(x^2+2x-5)'}{(x^2+2x-5)^2}$   
 $= \frac{1 \cdot (x^2+2x-5) - (x-1)(2x+2)}{(x^2+2x-5)^2}$   
 $= \frac{-x^2+2x-3}{(x^2+2x-5)^2}$
- (4)  $y' = \frac{(x^2+1)'(x^3+1) - (x^2+1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$   
 $= \frac{2x(x^3+1) - (x^2+1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$   
 $= \frac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$
- (5)  $y' = \frac{(x)'(x^4-8x^2+15) - x(x^4-8x^2+15)'}{(x^4-8x^2+15)^2}$   
 $= \frac{1 \cdot (x^4-8x^2+15) - x(4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+15)^2}$   
 $= \frac{-3x^4+8x^2+15}{(x^4-8x^2+15)^2}$

## 第48回

- (1)  $\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$
- (2)  $-\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{6x}{(x^2-4)^2}$
- (3)  $\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$
- (4)  $\frac{-x^2-8x-2}{(x^2-2)^2}$
- (5)  $\frac{-4x^2+6x}{(4x^2-4x+3)^2}$

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

特に  $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

## 解説

- (1)  $y' = -\left\{ -\frac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2} \right\} = \frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$
- (2)  $y' = -\frac{(x-3)'}{(x-3)^2} - \left\{ -\frac{3(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} \right\}$   
 $= -\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{6x}{(x^2-4)^2}$
- (3)  $y' = \frac{(x)'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$   
 $= \frac{1 \cdot (x^2-x+1) - x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$   
 $= \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$
- (4)  $y' = \frac{(2x^2+x)'(x^2-2) - (2x^2+x)(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}$   
 $= \frac{(4x+1)(x^2-2) - (2x^2+x) \cdot 2x}{(x^2-2)^2}$   
 $= \frac{-x^2-8x-2}{(x^2-2)^2}$
- (5)  $y' = \frac{(x^2)'(4x^2-4x+3) - x^2(4x^2-4x+3)'}{(4x^2-4x+3)^2}$   
 $= \frac{2x(4x^2-4x+3) - x^2(8x-4)}{(4x^2-4x+3)^2}$   
 $= \frac{-4x^2+6x}{(4x^2-4x+3)^2}$

## 第49回

- (1)  $4(x-1)(x^2-2x+5)$
- (2)  $-4(3x^3+x+1)^3(9x^2+1)$
- (3)  $2(4x-3)(12x+1)$
- (4)  $-\frac{4(10x-1)}{(5x^2-x-1)^5}$
- (5)  $4\left(x^2-\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

## 解説

- (1)  $y' = 2(x^2-2x+5)(x^2-2x+5)'$   
 $= 2(x^2-2x+5)(2x-2)$   
 $= 4(x-1)(x^2-2x+5)$
- (2)  $y' = -4(3x^3+x+1)^3(3x^3+x+1)'$   
 $= -4(3x^3+x+1)^3(9x^2+1)$
- (3)  $y' = (2x+1)'(4x-3)^2 + (2x+1)((4x-3)^2)'$   
 $= 2(4x-3)^2 + (2x+1) \cdot 2(4x-3)(4x-3)'$   
 $= 2(4x-3)^2 + (2x+1) \cdot 2(4x-3) \cdot 4$   
 $= 2(4x-3)((4x-3)+4(2x+1))$   
 $= 2(4x-3)(12x+1)$
- (4)  $y = \frac{1}{(5x^2-x-1)^4} = (5x^2-x-1)^{-4}$   
 よって  $y' = -4(5x^2-x-1)^{-5}(5x^2-x-1)'$   
 $= -4(5x^2-x-1)^{-5}(10x-1)$   
 $= -\frac{4(10x-1)}{(5x^2-x-1)^5}$
- (5)  $y' = 2\left(x^2-\frac{2}{x}\right)\left(x^2-\frac{2}{x}\right)'$   
 $= 2\left(x^2-\frac{2}{x}\right)\left(2x+\frac{2}{x^2}\right)$   
 $= 4\left(x^2-\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$

## 第50回

- (1)  $18x^2(x^3+4)$
- (2)  $20x(2x^2-1)^4$
- (3)  $2x(x^2+9)(3x^2+7)$
- (4)  $\frac{6x}{(x^2+3)^4}$
- (5)  $6\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(2-\frac{1}{x^3}\right)$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

## 解説

- (1)  $y' = 3 \cdot 2(x^3+4)(x^3+4)'$   
 $= 6(x^3+4) \cdot 3x^2$   
 $= 18x^2(x^3+4)$
- (2)  $y' = 5(2x^2-1)^4(2x^2-1)'$   
 $= 5(2x^2-1)^4 \cdot 4x$   
 $= 20x(2x^2-1)^4$
- (3)  $y' = (x^2-1)'(x^2+9)^2 + (x^2-1)((x^2+9)^2)'$   
 $= 2x(x^2+9)^2 + (x^2-1) \cdot 2(x^2+9)(x^2+9)'$   
 $= 2x(x^2+9)^2 + (x^2-1) \cdot 2(x^2+9) \cdot 2x$   
 $= 2x(x^2+9)((x^2+9)+2(x^2-1))$   
 $= 2x(x^2+9)(3x^2+7)$
- (4)  $y = -\frac{1}{(x^2+3)^3} = -(x^2+3)^{-3}$   
 よって  $y' = -(-3(x^2+3)^{-4}(x^2+3)')$   
 $= 3(x^2+3)^{-4} \cdot 2x$   
 $= \frac{6x}{(x^2+3)^4}$
- (5)  $y' = 3\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)'$   
 $= 3\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(4-\frac{2}{x^3}\right)$   
 $= 6\left(4x+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(2-\frac{1}{x^3}\right)$



## 第51回

- (1)  $\frac{4}{7}x^{-\frac{1}{7}}$   
 (2)  $-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$   
 (3)  $\frac{5}{4}\sqrt{x}$   
 (4)  $6x^{\frac{1}{2}}-5x^{-\frac{1}{2}}$   
 (5)  $7x^{\frac{2}{3}}+\frac{6}{5x^2\cdot\sqrt[5]{x}}$

$$(x^p)' = px^{p-1} \quad (p \text{ は有理数})$$

## 解説

- (1)  $y' = \frac{4}{7}x^{-\frac{1}{7}-1}$   
 $= \frac{4}{7}x^{-\frac{8}{7}} \left( = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^8}} \right)$   
 (2)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$   
 よって  $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$   
 $= -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} \left( = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \right)$   
 (3)  $y = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$   
 よって  $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$   
 $= \frac{3}{2}\sqrt{x}$   
 (4)  $y' = 4 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 6 \cdot \frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1}$   
 $= 6x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{1}{6}} \left( = 6\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[6]{x}} \right)$   
 (5)  $y = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x\sqrt[5]{x}} = 3x^{\frac{7}{3}} - x^{-\frac{6}{5}}$   
 よって  $y' = 3 \cdot \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} - \left( -\frac{6}{5}x^{-\frac{6}{5}-1} \right)$   
 $= 7x^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{5}x^{-\frac{11}{5}}$   
 $= 7x^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{5x^2\cdot\sqrt[5]{x}}$

## 第52回

- (1)  $-\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}$   
 (2)  $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$   
 (3)  $\frac{7}{3}\sqrt[6]{x}$   
 (4)  $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{8}x^{-\frac{3}{8}}$   
 (5)  $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$$(x^p)' = px^{p-1} \quad (p \text{ は有理数})$$

## 解説

- (1)  $y' = -\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$   
 $= -\frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}} \left( = -\frac{6}{5}\sqrt[5]{x} \right)$   
 (2)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$   
 よって  $y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$   
 $= -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} \left( = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \right)$   
 (3)  $y = 2x\sqrt[6]{x} = 2x^{\frac{7}{6}}$   
 よって  $y' = 2 \cdot \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1}$   
 $= \frac{7}{3}x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3}\sqrt[6]{x}$   
 (4)  $y' = 3 \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} + 5 \cdot \frac{3}{8}x^{\frac{3}{8}-1}$   
 $= 4x^{\frac{1}{3}} + \frac{15}{8}x^{-\frac{5}{8}} \left( = 4\sqrt[3]{x} + \frac{15}{8\sqrt[8]{x^5}} \right)$   
 (5)  $y = x\sqrt{x} + \frac{3}{x\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}$   
 よって  $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + 3 \left( -\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}-1} \right)$   
 $= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{7}{2}}$   
 $= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

## 第53回

- (1)  $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$   
 (2)  $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$   
 (3)  $\frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-2)^3}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$   
 (4)  $\frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$   
 (5)  $-\frac{12}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$$\begin{aligned} [f(g(x))]' &= f'(g(x))g'(x) \\ [f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

## 解説

- (1)  $y = \sqrt{x^2-4x+5} = (x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}}$   
 よって  $y' = \frac{1}{2}(x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}-1}(x^2-4x+5)'$   
 $= \frac{1}{2}(x^2-4x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x-4)$   
 $= \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$   
 (2)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$   
 よって  $y' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}(1-x^2)'$   
 $= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$   
 $= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$   
 $\left( = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \right)$   
 (別解)  $y' = -\frac{(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}$   
 $= -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$   
 $= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

- (3)  $y = \sqrt[4]{x^2-2} + \sqrt[3]{2x+3}$   
 $= (x^2-2)^{\frac{1}{4}} + (2x+3)^{\frac{1}{3}}$   
 よって  $y' = \frac{1}{4}(x^2-2)^{\frac{1}{4}-1}(x^2-2)'$   
 $+ \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{1}{3}-1}(2x+3)'$   
 $= \frac{1}{4}(x^2-2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x + \frac{1}{3}(2x+3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2$   
 $= \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-2)^3}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$   
 (4)  $y' = (x')\sqrt{2x^2+1} + x(\sqrt{2x^2+1})'$   
 $= 1 \cdot \sqrt{2x^2+1} + x \cdot \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}$   
 $= \sqrt{2x^2+1} + \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}$   
 $= \frac{(2x^2+1)+2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}$   
 $= \frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$   
 (5)  $y' = -\frac{(4x')\sqrt{x^2+3} - 4x(\sqrt{x^2+3})'}{(\sqrt{x^2+3})^2}$   
 $= -\frac{4\sqrt{x^2+3} - 4x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$   
 $= -\frac{4(x^2+3) - 4x^2}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$   
 $= -\frac{12}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$



## 第54回

(1)  $\frac{3x^2+2}{3\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}}$

(2)  $\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}}$

(3)  $\frac{2}{\sqrt{4x+1}} - \frac{5x}{2\sqrt[4]{(5x^2-2)^3}}$

(4)  $\frac{2x^2+x-5}{\sqrt{x^2-5}}$

(5)  $\frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$

$$\begin{aligned} [f(g(x))]' &= f'(g(x))g'(x) \\ [f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

## 解説

(1)  $y = \sqrt[3]{x^3+2x} = (x^3+2x)^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \text{よって } y' &= \frac{1}{3}(x^3+2x)^{\frac{1}{3}-1}(x^3+2x)' \\ &= \frac{1}{3}(x^3+2x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+2) \\ &= \frac{3x^2+2}{3\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}} \end{aligned}$$

(2)  $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}} = -(3x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \text{よって } y' &= -\left\{-\frac{1}{3}(3x^2+1)^{-\frac{1}{3}-1}(3x^2+1)'\right\} \\ &= \frac{1}{3}(3x^2+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 6x \\ &= \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}} \\ &= \frac{2x}{(3x^2+1)\sqrt[3]{3x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解 } y' &= \frac{(\sqrt[3]{3x^2+1})'}{(\sqrt[3]{3x^2+1})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}} \cdot 6x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}} \end{aligned}$$

(3)  $y = \sqrt{4x+1} - \sqrt[4]{5x^2-2}$

$$\begin{aligned} &= (4x+1)^{\frac{1}{2}} - (5x^2-2)^{\frac{1}{4}} \\ \text{よって } y' &= \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}-1}(4x+1)' \\ &\quad - \frac{1}{4}(5x^2-2)^{\frac{1}{4}-1}(5x^2-2)' \\ &= \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 - \frac{1}{4}(5x^2-2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 10x \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x+1}} - \frac{5x}{2\sqrt[4]{(5x^2-2)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= (x+1)'\sqrt{x^2-5} + (x+1)(\sqrt{x^2-5})' \\ &= 1 \cdot \sqrt{x^2-5} + (x+1) \frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}} \\ &= \sqrt{x^2-5} + \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-5}} \\ &= \frac{(x^2-5) + x(x+1)}{\sqrt{x^2-5}} \\ &= \frac{2x^2+x-5}{\sqrt{x^2-5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad y' &= \frac{(x^2)'\sqrt{x^2-4} - x^2(\sqrt{x^2-4})'}{(\sqrt{x^2-4})^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{x^2-4} - x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} \\ &= \frac{2x(x^2-4) - x^3}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} \\ &= \frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} \end{aligned}$$

第55回 (1)  $\pm \frac{1}{\sqrt{1-12x}}$

(2)  $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$  (3)  $-\frac{1}{x^2}$

(4)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$  (5)  $x$

両辺を  $y$  で微分して  $\frac{dx}{dy}$  を求め、 $\frac{dx}{dy} \neq 0$ のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  を用いる別解  $y$  について解き、 $y$  を  $x$  で微分する解説 (1)  $x = -3y^2 + y$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = -6y + 1$$

よって、 $y \neq \frac{1}{6}$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-6y+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $x = -3y^2 + y$  から  $3y^2 - y + x = 0$ これを  $y$  について解くと  $y = \frac{1 \pm \sqrt{1-12x}}{6}$ 

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{-(1 \pm \sqrt{1-12x}) + 1} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1-12x}} \end{aligned}$$

別解  $x = -3y^2 + y$  を  $y$  について解くと

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-12x}}{6}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-12x}}{6} \right)' = \frac{1}{6} (1 \pm \sqrt{1-12x})' \\ &= \pm \frac{1}{6} \cdot \frac{-12}{2\sqrt{1-12x}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-12x}} \end{aligned}$$

(2)  $x = (2-y)^3 + 3$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = -3(2-y)^2$$

よって、 $y \neq 2$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{3(2-y)^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $x = (2-y)^3 + 3$  から  $2-y = \sqrt[3]{x-3}$ 

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{別解 } x &= (2-y)^3 + 3 \text{ から } 2-y = \sqrt[3]{x-3} \\ \text{これを } y \text{ について解くと } y &= 2 - \sqrt[3]{x-3} \end{aligned}$$

よって  $\frac{dy}{dx} = (2 - \sqrt[3]{x-3})' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

(3)  $x = \frac{1}{y+1}$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{(y+1)^2}$$

よって  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -(y+1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x = \frac{1}{y+1}$  から  $y+1 = \frac{1}{x}$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

別解  $x = \frac{1}{y+1}$  を  $y$  について解くと  $y = \frac{1}{x} - 1$

よって  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$

(4)  $x = \frac{2}{y^2}$  の両辺を  $y$  で微分すると  $\frac{dx}{dy} = -\frac{4}{y^3}$

よって  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{y^3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x = \frac{2}{y^2}$  から  $y = \pm \sqrt{\frac{2}{x}}$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

別解  $x = \frac{2}{y^2}$  を  $y$  について解くと  $y = \pm \sqrt{\frac{2}{x}}$

よって  $\frac{dy}{dx} = \left(\pm \sqrt{\frac{2}{x}}\right)'$

$$= \pm \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x\sqrt{x}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

(5)  $x = \sqrt{2y-1}$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{2\sqrt{2y-1}} = \frac{1}{\sqrt{2y-1}}$$

よって  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \sqrt{2y-1} = x$

別解  $x = \sqrt{2y-1}$  を  $y$  について解くと

$$y = \frac{1}{2}(x^2+1)$$

よって  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}(x^2+1)\right)' = x$



第56回 (1)  $\pm \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (2)  $\pm \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ (3)  $-\frac{5}{x^2}$ (4)  $-\frac{1}{\sqrt[3]{(3x)^4}}$ (5)  $\pm \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ 両辺を  $y$  で微分して  $\frac{dx}{dy}$  を求め、 $\frac{dx}{dy} \neq 0$ のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  を用いる【別解】  $y$  について解き、 $y$  を  $x$  で微分する【解説】 (1)  $x = y^2 - 4y + 3$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = 2y - 4$$

よって、 $y \neq 2$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y-4} \quad \dots\dots ①$$

 $x = y^2 - 4y + 3$  から  $y^2 - 4y + 3 - x = 0$ これを  $y$  について解くと  $y = 2 \pm \sqrt{x+1}$ 

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2 \pm \sqrt{x+1}) - 4} = \pm \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

【別解】  $x = y^2 - 4y + 3$  を  $y$  について解くと

$$y = 2 \pm \sqrt{x+1}$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = (2 \pm \sqrt{x+1})' = \pm \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(2)  $x = (y+2)^2 - 3$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = 2(y+2)$$

よって、 $y \neq -2$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2(y+2)} \quad \dots\dots ①$$

 $x = (y+2)^2 - 3$  から  $y+2 = \pm \sqrt{x+3}$ 

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

【別解】  $x = (y+2)^2 - 3$  から  $y+2 = \pm \sqrt{x+3}$ これを  $y$  について解くと  $y = -2 \pm \sqrt{x+3}$ 

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = (-2 \pm \sqrt{x+3})' = \pm \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

(3)  $x = \frac{5}{y-3}$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{(y-3)^2}$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y-3)^2}{5} \quad \dots\dots ①$$

$$x = \frac{5}{y-3} \text{ から } y-3 = \frac{5}{x}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{x^2}$$

【別解】  $x = \frac{5}{y-3}$  を  $y$  について解くと  $y = \frac{5}{x} + 3$ 

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{5}{x} + 3\right)' = -\frac{5}{x^2}$$

(4)  $x = \frac{1}{3y^3}$  の両辺を  $y$  で微分すると  $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^4}$ 

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -y^4 \quad \dots\dots ①$$

$$x = \frac{1}{3y^3} \text{ から } y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt[3]{(3x)^4}} \left( = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{3x}} \right)$$

【別解】  $x = \frac{1}{3y^3}$  を  $y$  について解くと  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$ 

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{(3x)^4}} \left( = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{3x}} \right)$$

(5)  $x = \sqrt{y^2+4}$  の両辺を  $y$  で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+4}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}$$

よって、 $y \neq 0$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \quad \dots\dots ①$$

 $x = \sqrt{y^2+4}$  を  $y$  について解くと  $y = \pm \sqrt{x^2-4}$ 

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

【別解】  $x = \sqrt{y^2+4}$  を  $y$  について解くと

$$y = \pm \sqrt{x^2-4}$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = (\pm \sqrt{x^2-4})' = \pm \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \pm \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

## 第57回

(1)  $-2\sin x + 3$ (2)  $3\cos(3x+2)$ (3)  $4\sin^3 x \cos x$ (4)  $-\frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$ (5)  $-\frac{2}{\sin^2 x}$ (6)  $2\sin 2x + 4x \cos 2x$ (7)  $3x^2 \sin^2 4x + 8x^3 \sin 4x \cos 4x$ (8)  $\cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x$ (9)  $\frac{\cos x + 2x \sin x}{\cos^3 x}$ (10)  $\frac{1}{1+\cos x}$ 

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## 【解説】

(1)  $y' = -2\sin x + 3$ (2)  $y' = \cos(3x+2) \cdot (3x+2)' = 3\cos(3x+2)$ (3)  $y' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cos x$ (4)  $y' = \frac{1}{\cos^2(\cos x)} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$ (5)  $y' = -\frac{2(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{2}{\tan^2 x \cos^2 x} = -\frac{2}{\sin^2 x}$ (6)  $y' = 2 \cdot \sin 2x + 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2\sin 2x + 4x \cos 2x$   
 $(= 2\sin 2x + 2x \cos 2x)$ (7)  $y' = 3x^2 \cdot \sin^2 4x + x^3 \cdot 2\sin 4x \cdot (\cos 4x) \cdot 4 = 3x^2 \sin^2 4x + 8x^3 \sin 4x \cos 4x$   
 $(= x^2 \sin 4x (3\sin 4x + 8x \cos 4x))$ (8)  $y' = \cos x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = \cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x$ (9)  $y' = \frac{1 \cdot \cos^2 x - x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos x + 2x \sin x}{\cos^3 x}$ (10)  $y' = \frac{\cos x \cdot (1+\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$ 

## 第58回

(1)  $\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$ (2)  $2\sin(1-2x)$ (3)  $-6\sin x \cos^2 x$ (4)  $-\cos(\cos x) \cdot \sin x$ (5)  $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ (6)  $3x^2 \tan 3x + \frac{3x^3}{\cos^2 3x}$ (7)  $3\cos^3 2x - 18x \sin 2x \cos^2 2x$ (8)  $-3\sin 3x \sin 5x + 5\cos 3x \cos 5x$ (9)  $\frac{2\sin x - 4x \cos x}{\sin^3 x}$ (10)  $\frac{1}{1-\sin x}$ 

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## 【解説】

(1)  $y' = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$ (2)  $y' = -\sin(1-2x) \cdot (1-2x)' = 2\sin(1-2x)$ (3)  $y' = 2 \cdot 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = -6\sin x \cos^2 x$ (4)  $y' = \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\cos(\cos x) \cdot \sin x$ (5)  $y' = -\frac{(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = -\frac{2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ (6)  $y' = 3x^2 \cdot \tan 3x + x^3 \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} = 3x^2 \tan 3x + \frac{3x^3}{\cos^2 3x}$   
 $(= 3x^2 \left( \tan 3x + \frac{x}{\cos^2 3x} \right))$ (7)  $y' = 3 \cdot \cos^3 2x + 3x \cdot \{3\cos^2 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2\} = 3\cos^3 2x - 18x \sin 2x \cos^2 2x$   
 $(= 3\cos^2 2x (\cos 2x - 6x \sin 2x))$ (8)  $y' = -3\sin 3x \cdot \sin 5x + \cos 3x \cdot 5\cos 5x = -3\sin 3x \sin 5x + 5\cos 3x \cos 5x$ (9)  $y' = \frac{2 \cdot \sin^2 x - 2x \cdot 2\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2\sin x - 4x \cos x}{\sin^3 x} \left( = \frac{2\sin x - 2x \cos x}{\sin^3 x} \right)$ (10)  $y' = \frac{-\sin x \cdot (1-\sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$

## 第59回

- (1)  $\frac{4x}{2x^2+3}$   
 (2)  $\frac{3x^2}{x^3-2}$   
 (3)  $3\log x + 3 - 2x$   
 (4)  $-\frac{6}{9x^2-1}$   
 (5)  $\frac{4(\log x)^3}{x}$   
 (6)  $\frac{1}{x\log 8}$   
 (7)  $\log_a(2x+1) + \frac{2x}{(2x+1)\log a}$   
 (8)  $-\frac{\log a}{x(\log x)^2}$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}$$

$$|\log|f(x)||' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

## 解説

- (1)  $y' = \frac{(2x^2+3)'}{2x^2+3}$   
 $= \frac{4x}{2x^2+3}$   
 (2)  $y' = \frac{(x^3-2)'}{x^3-2}$   
 $= \frac{3x^2}{x^3-2}$   
 (3)  $y' = 3\log x + 3x \cdot \frac{1}{x} - 2x$   
 $= 3\log x + 3 - 2x$   
 (4)  $y = \log|3x+1| - \log|3x-1|$  より  
 $y' = \frac{(3x+1)'}{3x+1} - \frac{(3x-1)'}{3x-1}$   
 $= \frac{3}{3x+1} - \frac{3}{3x-1}$   
 $= \frac{3(3x-1) - 3(3x+1)}{(3x+1)(3x-1)}$   
 $= -\frac{6}{9x^2-1}$

- (5)  $y' = 4(\log x)^3 \cdot (\log x)'$   
 $= \frac{4(\log x)^3}{x}$   
 (6)  $y' = \frac{(9x)'}{9x\log 8}$   
 $= \frac{1}{x\log 8}$   
 (7)  $y' = 1 \cdot \log_a(2x+1) + x \cdot \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\log a}$   
 $= \log_a(2x+1) + \frac{2x}{(2x+1)\log a}$   
 (8)  $y = \frac{\log a}{\log x}$  より  
 $y' = -\frac{\log a}{(\log x)^2} \cdot (\log x)'$   
 $= -\frac{\log a}{x(\log x)^2}$

## 第60回

- (1)  $\frac{9x^2}{3x^3+5}$   
 (2)  $\frac{2x-1}{x^2-x-1}$   
 (3)  $\frac{3(1-\log x)}{x^2}$   
 (4)  $-\frac{4}{x^3-2x}$   
 (5)  $\frac{\log 2x}{2x}$   
 (6)  $\frac{2}{x\log 7}$   
 (7)  $\log_a x^3 + \frac{3}{\log a}$   
 (8)  $-\frac{\log 2a}{x(\log x)^2}$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}$$

$$|\log|f(x)||' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

## 解説

- (1)  $y' = \frac{(3x^3+5)'}{3x^3+5}$   
 $= \frac{9x^2}{3x^3+5}$   
 (2)  $y' = \frac{(x^2-x-1)'}{x^2-x-1}$   
 $= \frac{2x-1}{x^2-x-1}$   
 (3)  $y' = -\frac{3}{x^2}\log x + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}$   
 $= \frac{3(1-\log x)}{x^2}$   
 (4)  $y = \log|x^2| - \log|x^2-2|$  より  
 $y' = \frac{(x^2)'}{x^2} - \frac{(x^2-2)'}{x^2-2}$   
 $= \frac{2x}{x^2} - \frac{2x}{x^2-2} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-2}$   
 $= \frac{2(x^2-2) - 2x \cdot x}{x(x^2-2)}$   
 $= -\frac{4}{x^3-2x}$

- (5)  $y' = \frac{1}{4} \cdot 2(\log 2x) \cdot (\log 2x)'$   
 $= \frac{1}{2}(\log 2x) \cdot \frac{(2x)'}{2x}$   
 $= \frac{\log 2x}{2x}$   
 (6)  $y' = \frac{(2x^2)'}{2x^2\log 7}$   
 $= \frac{2}{x\log 7}$   
 (7)  $y' = 1 \cdot \log_a x^3 + x \cdot \frac{(x^3)'}{x^3\log a}$   
 $= \log_a x^3 + \frac{3}{\log a}$   
 (8)  $y = \frac{\log 2a}{\log x}$  より  
 $y' = -\frac{\log 2a}{(\log x)^2} \cdot (\log x)'$   
 $= -\frac{\log 2a}{x(\log x)^2}$



## 第61回

- (1)  $5e^{5x}$   
 (2)  $-3x^2e^{-x^3+1}$   
 (3)  $3 \cdot 6^{3x} \log 6$   
 (4)  $\frac{3^{\log x} \log 3}{x}$   
 (5)  $x(3x+2)e^{3x}$   
 (6)  $-e^{-x}(\sin x - \cos x)$   
 (7)  $-\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$   
 (8)  $\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a$$

## 解説

- (1)  $y' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}$   
 (2)  $y' = e^{-x^3+1} \cdot (-x^3+1)'$   
 $= -3x^2e^{-x^3+1}$   
 (3)  $y' = 6^{3x} \log 6 \cdot (3x)'$   
 $= 3 \cdot 6^{3x} \log 6$   
 (4)  $y' = 3^{\log x} \log 3 \cdot (\log x)'$   
 $= \frac{3^{\log x} \log 3}{x}$   
 (5)  $y' = 2xe^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x}$   
 $= x(3x+2)e^{3x}$   
 (6)  $y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$   
 $= -e^{-x}(\sin x - \cos x)$   
 (7)  $y' = -\frac{(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2}$   
 $= -\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$   
 (8)  $y' = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$   
 $= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

## 第62回

- (1)  $-3e^{-3x}$   
 (2)  $4xe^{2x^2}$   
 (3)  $2x \cdot 5^{x^2+1} \log 5$   
 (4)  $-(\log 10)10^{\cos x} \sin x$   
 (5)  $(3x+4)e^x$   
 (6)  $e^{2x}(2\cos x - \sin x)$   
 (7)  $\frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$   
 (8)  $-\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a$$

## 解説

- (1)  $y' = e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3e^{-3x}$   
 (2)  $y' = e^{2x^2} \cdot (2x^2)' = 4xe^{2x^2}$   
 (3)  $y' = 5^{x^2+1} \log 5 \cdot (x^2+1)'$   
 $= 2x \cdot 5^{x^2+1} \log 5$   
 (4)  $y' = 10^{\cos x} \log 10 \cdot (\cos x)'$   
 $= -(\log 10)10^{\cos x} \sin x$   
 (5)  $y' = 3e^x + (3x+1)e^x = (3x+4)e^x$   
 (6)  $y' = 2e^{2x} \cos x + e^{2x}(-\sin x)$   
 $= e^{2x}(2\cos x - \sin x)$   
 (7)  $y' = -\frac{(e^{2x} + e^{-2x})'}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$   
 $= -\frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$   
 $= -\frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$   
 (8)  $y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2}$   
 $= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$   
 $= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$

## 第63回

- (1)  $5\cos^4 x \cos 6x$  (2)  $\frac{3}{4} \sin^2 2x \cos 2x$   
 (3)  $-\frac{(2x+1)\sin \sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$   
 (4)  $\frac{1}{x^2-1}$  (5)  $\frac{x}{x-1}$

三角関数の公式、対数の性質を利用する

## 解説

- (1)  $y' = 5\cos^4 x(-\sin x)\sin 5x + \cos^5 x \cdot 5\cos 5x$   
 $= 5\cos^4 x(\cos x \cos 5x - \sin x \sin 5x)$   
 $= 5\cos^4 x \cos 6x$   
 (2)  $y' = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^3 = \frac{1}{8} \sin^3 2x$   
 よって  
 $y' = \frac{1}{8} \cdot 3\sin^2 2x(\sin 2x)' = \frac{3}{8} \sin^2 2x \cdot 2\cos 2x$   
 $= \frac{3}{4} \sin^2 2x \cos 2x \left(= \frac{3}{8} \sin 4x \sin 2x\right)$   
 (別解)  $y = \sin^3 x \cos^3 x$   
 よって  $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot \cos^3 x$   
 $+ \sin^3 x \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$   
 $= 3\sin^2 x \cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)$   
 $\left(= \frac{3}{4} \sin^2 2x \cos 2x = \frac{3}{8} \sin 4x \sin 2x\right)$   
 (3)  $y' = -\sin \sqrt{x^2+x+1} \cdot (\sqrt{x^2+x+1})'$   
 $= -\sin \sqrt{x^2+x+1} \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$   
 $= -\frac{(2x+1)\sin \sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$   
 (4)  $y = \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} [\log(1-x) - \log(1+x)]$   
 よって  $y' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1-x)'}{1-x} - \frac{(1+x)'}{1+x} \right\}$   
 $= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$   
 $= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)} \right\} = -\frac{1}{x^2-1}$   
 (5)  $y = \log e^x + \log(1-x) = x + \log(1-x)$   
 よって  $y' = 1 + \frac{(1-x)'}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x}$   
 $= \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

## 第64回

- (1)  $3\cos^2 x \cos 4x$  (2)  $-8\sin 2x \cos 2x$   
 (3)  $-\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$   
 (4)  $\frac{4}{x^2-1}$  (5)  $\frac{3x^2-4}{x^3-2x}$

三角関数の公式、対数の性質を利用する

## 解説

- (1)  $y' = 3\cos^2 x(-\sin x)\sin 3x + \cos^3 x \cdot 3\cos 3x$   
 $= 3\cos^2 x(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x)$   
 $= 3\cos^2 x \cos 4x$   
 (2)  $y = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 2\cos^2 2x$   
 よって  
 $y' = 2 \cdot 2\cos 2x \cdot (\cos 2x)'$   
 $= 4\cos 2x \cdot (-2\sin 2x)$   
 $= -8\sin 2x \cos 2x$   
 $(= -4\sin 4x)$   
 (3)  $y' = \frac{(1+\cos^2 x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{2\cos x \cdot (-\sin x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$   
 $= -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \left(= -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)$   
 (4)  $y = 2(\log|x-1| - \log|x+1|)$   
 よって  
 $y' = 2 \left\{ \frac{(x-1)'}{x-1} - \frac{(x+1)'}{x+1} \right\}$   
 $= 2 \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$   
 $= 2 \left\{ \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} \right\}$   
 $= \frac{4}{x^2-1}$   
 (5)  $y = \log x^2 + \log \sqrt{x^2-2}$   
 $= 2\log|x| + \frac{1}{2} \log(x^2-2)$   
 よって  
 $y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-2)'}{x^2-2} = \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2-2}$   
 $= \frac{2(x^2-2) + x \cdot x}{x(x^2-2)} = \frac{3x^2-4}{x^3-2x}$

## 第65回

- (1)  $e^3$   
 (2)  $\frac{1}{e}$   
 (3)  $\frac{1}{e^2}$   
 (4) 5

$$\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

## 解説

- (1)  $3x=t$  とおくと  $x \rightarrow 0$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^3 = e^3$$

- (2)  $-\frac{1}{x}=t$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow -0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow -0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow -0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} \\ = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- (3)  $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{x}}$

$\frac{2}{x}=t$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(1+t)^{\frac{2}{t}}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2} \\ = \frac{1}{e^2}$$

- (4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

$5x=t$  とおくと  $x \rightarrow 0$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{5}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^5 \\ = \log e^5 = 5$$

## 第66回

- (1)  $\sqrt{e}$   
 (2)  $\frac{1}{e^3}$   
 (3)  $e$   
 (4)  $-1$

$$\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

## 解説

- (1)  $\frac{1}{2x}=t$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{1}{2}} \\ = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

- (2)  $-\frac{3}{x}=t$  とおくと  $x \rightarrow -\infty$  のとき  $t \rightarrow +0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{-\frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-3} \\ = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

- (3)  $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

$-\frac{1}{x}=t$  とおくと  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow -0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{1}{(1+t)^{-\frac{1}{t}}} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{1}{\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}} \\ = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

- (4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \log(1-x)^{\frac{1}{x}}$

$-x=t$  とおくと  $x \rightarrow 0$  のとき  $t \rightarrow 0$   
 よって

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} \\ = \log e^{-1} = -1$$

## 第67回

- (1)  $t-2$  (2)  $-2\sqrt{1-t^2}$   
 (3)  $\frac{t^2-2t-1}{2t}$  (4)  $-\frac{1}{\tan t}$   
 (5)  $-2\sin 2t \cos^2 2t$

$x=f(t)$ ,  $y=g(t)$  ( $t$  は媒介変数) のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

## 解説

- (1)  $\frac{dx}{dt}=2$ ,  $\frac{dy}{dt}=2t-4$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{2t-4}{2} = t-2$$

- (2)  $\frac{dx}{dt} = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $\frac{dy}{dt}=2t$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}} = -2\sqrt{1-t^2}$$

- (3)  $\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (1+t^2) - t^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1 \cdot (1+t^2) - (1-t) \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2-2t-1}{\frac{2t}{(1+t^2)^2}} = \frac{t^2-2t-1}{2t}$$

- (4)  $\frac{dx}{dt}=1 \cdot \cos t - t \cdot \sin t - \cos t = -t \sin t$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t - \sin t = t \cos t$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{t \cos t}{-t \sin t} = -\frac{1}{\tan t}$$

- (5)  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\cos^2 2t}$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot (-2 \sin 2t) = -4 \sin 2t$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{-4 \sin 2t}{\frac{2}{\cos^2 2t}} = -2 \sin 2t \cos^2 2t \\ (= -\sin 4t \cos 2t)$$

## 第68回

- (1)  $\frac{2t+1}{3t^2}$  (2)  $\sqrt{\frac{t}{2t-1}}$   
 (3)  $-\frac{1}{t^2+1}$  (4)  $-\frac{2 \cos 2t}{1+\sin t}$   
 (5)  $-\frac{5}{2} \tan t$

$x=f(t)$ ,  $y=g(t)$  ( $t$  は媒介変数) のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

## 解説

- (1)  $\frac{dx}{dt}=3t^2$ ,  $\frac{dy}{dt}=2t+1$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{3t^2}$$

- (2)  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{2\sqrt{2t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2t-1}}$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2t-1}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \sqrt{\frac{t}{2t-1}}$$

- (3)  $\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot t - (t^2-1) \cdot 1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1 \cdot t - (1-t) \cdot 1}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}} = -\frac{1}{t^2+1}$$

- (4)  $\frac{dx}{dt}=1+\sin t$ ,  $\frac{dy}{dt}=-2 \cos 2t$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cos 2t}{1+\sin t}$$

- (5)  $\frac{dx}{dt}=2 \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -6 \sin t \cos^2 t$

$$\frac{dy}{dt} = 5 \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t = 15 \sin^2 t \cos t$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{15 \sin^2 t \cos t}{-6 \sin t \cos^2 t} \\ = -\frac{5 \sin t}{2 \cos t} = -\frac{5}{2} \tan t$$



## 第69回

- (1)  $-\frac{x}{y}$   
 (2)  $-\frac{x+y}{x-y}$   
 (3)  $\frac{x-1}{y+1}$   
 (4)  $\sqrt{\frac{y}{x}}$   
 (5)  $\frac{1}{2\cos 2y}$

$F(x, y)=0$  で定められる関数の導関数

両辺を  $x$  で微分して,  $\frac{dy}{dx}$  を求める

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

## 解説

- (1) 両辺を  $x$  について微分すると

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって,  $y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

- (2) 両辺を  $x$  について微分すると

$$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって,  $x-y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x-y}$

- (3) 両辺を  $x$  について微分すると

$$2(y+1)\frac{dy}{dx}=2x-2$$

よって,  $y+1 \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y+1}$

- (4) 両辺を  $x$  について微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$$

よって,  $x \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$

- (5) 両辺を  $x$  について微分すると

$$1=2\cos 2y \frac{dy}{dx}$$

よって,  $\cos 2y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos 2y}$

## 第70回

- (1)  $\frac{x}{9y}$   
 (2)  $\frac{x-3y}{3x+y}$   
 (3)  $\frac{3x^2+6x}{2y}$   
 (4)  $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$   
 (5)  $-\sin^2 y$

$F(x, y)=0$  で定められる関数の導関数

両辺を  $x$  で微分して,  $\frac{dy}{dx}$  を求める

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

## 解説

- (1) 両辺を  $x$  について微分すると

$$\frac{2}{9}x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって,  $y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{9y}$

- (2) 両辺を  $x$  について微分すると

$$2x-6y-6x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって,  $3x+y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-3y}{3x+y}$

- (3) 両辺を  $x$  について微分すると

$$2y\frac{dy}{dx}=3x^2+6x$$

よって,  $y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+6x}{2y}$

- (4) 両辺を  $x$  について微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

よって,  $x \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

- (5) 両辺を  $x$  について微分すると

$$1 = \frac{1}{\tan^2 y} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

よって  $\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y$

## 第71回

- (1)  $-\frac{2x}{(2x-1)^3}$   
 (2)  $4\sin 2x \cos 2x + \frac{3}{\cos^2 3x}$   
 (3)  $2(x \log x - 1)(\log x + 1)$   
 (4)  $-6x \cdot 5^{-3x^2} \log 5$   
 (5)  $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

## 解説

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= \frac{2x \cdot (2x-1)^2 - x^2 \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{2x((2x-1)-2x)}{(2x-1)^3} \\ &= -\frac{2x}{(2x-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= 2\sin 2x \cdot 2\cos 2x + \frac{3}{\cos^2 3x} \\ &= 4\sin 2x \cos 2x + \frac{3}{\cos^2 3x} \\ &= \left(2\sin 4x + \frac{3}{\cos^2 3x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y' &= 2(x \log x - 1)(\log x - 1)' \\ &= 2(x \log x - 1)\left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= 2(x \log x - 1)(\log x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= 5^{-3x^2} \cdot \log 5 \cdot (-3x^2)' \\ &= -6x \cdot 5^{-3x^2} \log 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{dx}{dt} &= \frac{1 \cdot (1+t^3) - t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2t \cdot (1+t^3) - t^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \\ \text{よって} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \end{aligned}$$

## 第72回

- (1)  $\frac{10x^2+3}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$   
 (2)  $\frac{\cos x + 3x \sin x}{\cos^4 x}$   
 (3)  $-\tan x$   
 (4)  $2(x \log x - x + 1) \log x$   
 (5)  $-\frac{25x}{9y}$

## 解説

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= 1 \cdot \sqrt[3]{2x^2+1} + x \cdot \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}} \\ &= \frac{3(2x^2+1) + 4x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}} \\ &= \frac{10x^2+3}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= \frac{1 \cdot \cos^3 x - x \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\cos x + 3x \sin x}{\cos^4 x} \end{aligned}$$

$$(3) \quad y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= 2(x \log x - x + 1)(x \log x - x + 1)' \\ &= 2(x \log x - x + 1)\left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= 2(x \log x - x + 1) \log x \end{aligned}$$

- (5) 両辺を  $x$  について微分すると

$$\frac{2}{9}x + \frac{2}{25}y\frac{dy}{dx} = 0$$

よって,  $y \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = -\frac{25x}{9y}$

第73回 以下,  $C$  は積分定数とする。

- (1)  $\frac{3}{5}x^5 + C$   
 (2)  $-\frac{1}{2x^2} + C$   
 (3)  $6\log|x| + C$   
 (4)  $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$   
 (5)  $y^7 + \frac{1}{y} + y + C$   
 (6)  $\frac{2}{3}x^3 - 4x + 3\log|x| + C$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

解説

- (1) (与式)  $= 3 \cdot \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{3}{5} x^5 + C$   
 (2) (与式)  $= \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$   
 $= -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$   
 (3) (与式)  $= 6\log|x| + C$   
 (4) (与式)  $= \frac{1}{\frac{1}{4}+1} x^{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C$   
 (5) (与式)  $= \int (7y^6 - y^{-2} + 1) dy$   
 $= 7 \cdot \frac{1}{6+1} y^{6+1} - \frac{1}{-2+1} y^{-2+1} + y + C$   
 $= y^7 + y^{-1} + y + C$   
 $= y^7 + \frac{1}{y} + y + C$   
 (6) (与式)  $= \int \left( 2x^2 - 4 + \frac{3}{x} \right) dx$   
 $= 2 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} - 4x + 3\log|x| + C$   
 $= \frac{2}{3} x^3 - 4x + 3\log|x| + C$

第74回

- (1)  $\frac{2}{7}x^7 + C$   
 (2)  $-\frac{5}{x} + C$   
 (3)  $3\log|x| + C$   
 (4)  $14\sqrt[7]{x^3} + C$   
 (5)  $\frac{4}{3}y^6 + \frac{2}{y^2} - y + C$   
 (6)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2\log|x| + C$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

解説

- (1) (与式)  $= 2 \cdot \frac{1}{6+1} x^{6+1} + C = \frac{2}{7} x^7 + C$   
 (2) (与式)  $= \int 5x^{-2} dx = 5 \cdot \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C$   
 $= -5x^{-1} + C$   
 $= -\frac{5}{x} + C$   
 (3) (与式)  $= 3\log|x| + C$   
 (4) (与式)  $= \int 6x^{-\frac{4}{7}} dx$   
 $= 6 \cdot \frac{1}{-\frac{4}{7}+1} x^{-\frac{4}{7}+1} + C$   
 $= 14x^{\frac{3}{7}} + C$   
 $= 14\sqrt[7]{x^3} + C$   
 (5) (与式)  $= \int (8y^5 - 4y^{-3} - 1) dy$   
 $= 8 \cdot \frac{1}{5+1} y^{5+1} - 4 \cdot \frac{1}{-3+1} y^{-3+1} - y + C$   
 $= \frac{4}{3} y^6 + 2y^{-2} - y + C$   
 $= \frac{4}{3} y^6 + \frac{2}{y^2} - y + C$   
 (6) (与式)  $= \int \left( x^3 - 5x + \frac{2}{x} \right) dx$   
 $= \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 5 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} + 2\log|x| + C$   
 $= \frac{1}{4} x^4 - \frac{5}{2} x^2 + 2\log|x| + C$

第75回

- (1)  $\frac{5}{8}x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x^3} + 4\sqrt[4]{x} + C$   
 (2)  $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} + C$   
 (3)  $x - 4\sqrt{x} + \log|x| + C$   
 (4)  $y - 4\log|y| - \frac{4}{y} + C$   
 (5)  $t - 12\sqrt{t} + 9\log|t| + C$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

解説

- (1) (与式)  $= \int \left( x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{3}{4}} \right) dx$   
 $= \frac{5}{8} x^{\frac{5}{2}+1} + 4x^{\frac{1}{4}} + C = \frac{5}{8} x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x^3} + 4\sqrt[4]{x} + C$   
 (2) (与式)  $= \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{3}{8} x^{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{3}{8} x^2\sqrt[3]{x^2} + C$   
 (3) (与式)  $= \int \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx$   
 $= \int \left( 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx = x - 4x^{\frac{1}{2}} + \log|x| + C$   
 $= x - 4\sqrt{x} + \log|x| + C$   
 (注) 被積分関数の形から  $x > 0$  であり,  
 $\log|x| = \log x$  となる。  
 (4) (与式)  $= \int \left( 1 - \frac{2}{y} \right)^2 dy$   
 $= \int \left( 1 - \frac{4}{y} + \frac{4}{y^2} \right) dy = \int \left( 1 - \frac{4}{y} + 4y^{-2} \right) dy$   
 $= y - 4\log|y| - 4y^{-1} + C = y - 4\log|y| - \frac{4}{y} + C$   
 (5) (与式)  $= \int \frac{t - 6\sqrt{t} + 9}{t} dt$   
 $= \int \left( 1 - 6t^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{t} \right) dt$   
 $= t - 12t^{\frac{1}{2}} + 9\log|t| + C$   
 $= t - 12\sqrt{t} + 9\log|t| + C$   
 (注) 被積分関数の形から  $t > 0$  であり,  
 $\log|t| = \log t$  となる。

第76回

- (1)  $\frac{4}{7}x^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$   
 (2)  $\frac{5}{18}x^3\sqrt[5]{x^3} + C$   
 (3)  $4\log|y| - 8\sqrt{y} + y + C$   
 (4)  $-\frac{9}{x} - 6\log|x| + x + C$   
 (5)  $u - 16\sqrt{u} + 16\log|u| + C$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

解説

- (1) (与式)  $= \int \left( x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx$   
 $= \frac{4}{7} x^{\frac{4}{3}+1} + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{4}{7} x^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$   
 (2) (与式)  $= \int x^{\frac{13}{5}} dx = \frac{5}{18} x^{\frac{13}{5}+1} + C = \frac{5}{18} x^3\sqrt[5]{x^3} + C$   
 (3) (与式)  $= \int \left( \frac{4}{y} - \frac{4}{\sqrt{y}} + 1 \right) dy$   
 $= \int \left( \frac{4}{y} - 4y^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) dy = 4\log|y| - 8y^{\frac{1}{2}} + y + C$   
 $= 4\log|y| - 8\sqrt{y} + y + C$   
 (注) 被積分関数の形から  $y > 0$  であり,  
 $\log|y| = \log y$  となる。  
 (4) (与式)  $= \int \left( \frac{3}{x} - 1 \right)^2 dx = \int \left( \frac{9}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 \right) dx$   
 $= \int \left( 9x^{-2} - \frac{6}{x} + 1 \right) dx$   
 $= -9x^{-1} - 6\log|x| + x + C$   
 $= -\frac{9}{x} - 6\log|x| + x + C$   
 (5) (与式)  $= \int \frac{u - 8\sqrt{u} + 16}{u} du$   
 $= \int \left( 1 - 8u^{-\frac{1}{2}} + \frac{16}{u} \right) du$   
 $= u - 16u^{\frac{1}{2}} + 16\log|u| + C$   
 $= u - 16\sqrt{u} + 16\log|u| + C$   
 (注) 被積分関数の形から  $u > 0$  であり,  
 $\log|u| = \log u$  となる。



## 第77回

- (1)  $-\cos x + C$
- (2)  $2\sin x + C$
- (3)  $4\tan x + C$
- (4)  $-\frac{1}{\tan x} + C$
- (5)  $-3\cos x + 2\sin x + C$
- (6)  $3\tan x - 4\sin x + C$
- (7)  $\tan x - x + C$
- (8)  $-\cos x + \sin x + C$

$$\begin{aligned}\int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{\tan x} + C\end{aligned}$$

## 解説

- (1) (与式)  $= -\cos x + C$
- (2) (与式)  $= 2\sin x + C$
- (3) (与式)  $= 4\tan x + C$
- (4) (与式)  $= -\frac{1}{\tan x} + C$
- (5) (与式)  $= -3\cos x + 2\sin x + C$
- (6) (与式)  $= 3\tan x - 4\sin x + C$
- (7) (与式)  $= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$   
 $= \tan x - x + C$
- (8) (与式)  $= \int \left( 1 + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \sin x dx$   
 $= \int (\sin x + \cos x) dx$   
 $= -\cos x + \sin x + C$

## 第78回

- (1)  $-3\cos x + C$
- (2)  $\sin x + C$
- (3)  $2\tan x + C$
- (4)  $-\frac{3}{\tan x} + C$
- (5)  $-2\cos x + 3\sin x + C$
- (6)  $5\tan x + 2\sin x + C$
- (7)  $\sin x + \cos x + C$
- (8)  $\tan x + C$

$$\begin{aligned}\int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{\tan x} + C\end{aligned}$$

## 解説

- (1) (与式)  $= -3\cos x + C$
- (2) (与式)  $= \sin x + C$
- (3) (与式)  $= 2\tan x + C$
- (4) (与式)  $= -\frac{3}{\tan x} + C$
- (5) (与式)  $= -2\cos x + 3\sin x + C$
- (6) (与式)  $= 5\tan x + 2\sin x + C$
- (7) (与式)  $= \int \left( 1 - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \cos x dx$   
 $= \int (\cos x - \sin x) dx$   
 $= \sin x + \cos x + C$
- (8) (与式)  $= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} dx$   
 $= \int \frac{dx}{\cos^2 x}$   
 $= \tan x + C$

## 第79回

- (1)  $4e^x + C$
- (2)  $\frac{3^x}{\log 3} + C$
- (3)  $-\frac{1}{7^x \log 7} + C$
- (4)  $\frac{2^x}{\log 2} - e^x + C$
- (5)  $e^{x+3} + C$
- (6)  $e^{x+4} + \frac{5^{x+1}}{\log 5} + C$
- (7)  $e^x - x + C$
- (8)  $\log|x| + \frac{2^x}{\log 2} + C$

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)\end{aligned}$$

## 解説

- (1) (与式)  $= 4e^x + C$
- (2) (与式)  $= \frac{3^x}{\log 3} + C$
- (3) (与式)  $= \int \left( \frac{1}{7} \right)^x dx = \frac{\left( \frac{1}{7} \right)^x}{\log \frac{1}{7}} + C$   
 $= -\frac{1}{7^x \log 7} + C$
- (4) (与式)  $= \frac{2^x}{\log 2} - e^x + C$
- (5) (与式)  $= \int e^3 \cdot e^x dx = e^3 \cdot e^x + C = e^{x+3} + C$
- (6) (与式)  $= \int (e^4 \cdot e^x + 5 \cdot 5^x) dx$   
 $= e^4 \cdot e^x + 5 \cdot \frac{5^x}{\log 5} + C$   
 $= e^{x+4} + \frac{5^{x+1}}{\log 5} + C$
- (7) (与式)  $= \int \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x + 1} dx$   
 $= \int (e^x - 1) dx$   
 $= e^x - x + C$
- (8) (与式)  $= \int \left( \frac{1}{x} + 2^x \right) dx = \log|x| + \frac{2^x}{\log 2} + C$

## 第80回

- (1)  $5e^x + C$
- (2)  $\frac{2^x}{\log 2} + C$
- (3)  $-\frac{1}{5^x \log 5} + C$
- (4)  $\frac{7^x}{\log 7} + e^x + C$
- (5)  $e^{x+5} + C$
- (6)  $e^{x+1} - \frac{3^{x+2}}{\log 3} + C$
- (7)  $x + e^x + C$
- (8)  $\frac{3^x}{\log 3} - \log|x| + C$

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)\end{aligned}$$

## 解説

- (1) (与式)  $= 5e^x + C$
- (2) (与式)  $= \frac{2^x}{\log 2} + C$
- (3) (与式)  $= \int \left( \frac{1}{5} \right)^x dx = \frac{\left( \frac{1}{5} \right)^x}{\log \frac{1}{5}} + C$   
 $= -\frac{1}{5^x \log 5} + C$
- (4) (与式)  $= \frac{7^x}{\log 7} + e^x + C$
- (5) (与式)  $= \int e^5 \cdot e^x dx = e^5 \cdot e^x + C = e^{x+5} + C$
- (6) (与式)  $= \int (e \cdot e^x - 3^2 \cdot 3^x) dx$   
 $= e \cdot e^x - 3^2 \cdot \frac{3^x}{\log 3} + C$   
 $= e^{x+1} - \frac{3^{x+2}}{\log 3} + C$
- (7) (与式)  $= \int \frac{(1 + e^x)(1 - e^x)}{1 - e^x} dx$   
 $= \int (1 + e^x) dx$   
 $= x + e^x + C$
- (8) (与式)  $= \int \left( 3^x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3^x}{\log 3} - \log|x| + C$

## 第81回

- (1)  $\frac{1}{8}(2x-1)^4 + C$   
 (2)  $\frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}x+2\right)^7 + C$   
 (3)  $-\frac{1}{54}(1-6x)^9 + C$   
 (4)  $-\frac{1}{2(x+1)^2} + C$   
 (5)  $\frac{3}{16}(4x+5)\sqrt[3]{4x+5} + C$   
 (6)  $\frac{5}{3}\log|3x+1| + C$   
 (7)  $-\frac{1}{4}\cos(4x-3) + C$   
 (8)  $\frac{1}{3}\tan 3x + C$   
 (9)  $\frac{1}{3}e^{3x-1} + C$   
 (10)  $\frac{3^{2x+1}}{2\log 3} + C$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad a \neq 0 \text{ のとき}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

## 解説

- (1) (与式)  $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(2x-1)^4 + C$   
 $= \frac{1}{8}(2x-1)^4 + C$   
 (2) (与式)  $= 5 \cdot \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}x+2\right)^7 + C$   
 $= \frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}x+2\right)^7 + C$   
 (3) (与式)  $= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9}(1-6x)^9 + C$   
 $= -\frac{1}{54}(1-6x)^9 + C$

- (4) (与式)  $= \int (x+1)^{-3}dx$   
 $= \frac{1}{-2}(x+1)^{-2} + C$   
 $= -\frac{1}{2(x+1)^2} + C$   
 (5) (与式)  $= \int (4x+5)^{\frac{1}{3}}dx$   
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}(4x+5)^{\frac{4}{3}} + C$   
 $= \frac{3}{16}(4x+5)\sqrt[3]{4x+5} + C$   
 (6) (与式)  $= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log|3x+1| + C$   
 $= \frac{5}{3}\log|3x+1| + C$   
 (7) (与式)  $= \frac{1}{4} \cdot \{-\cos(4x-3)\} + C$   
 $= -\frac{1}{4}\cos(4x-3) + C$   
 (8) (与式)  $= \frac{1}{3}\tan 3x + C$   
 (9) (与式)  $= \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$   
 (10) (与式)  $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x+1}}{\log 3} + C$   
 $= \frac{3^{2x+1}}{2\log 3} + C$

## 第82回

- (1)  $\frac{1}{25}(5x+1)^5 + C$   
 (2)  $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6 + C$   
 (3)  $-\frac{1}{21}(5-3x)^7 + C$   
 (4)  $-\frac{1}{8(2x-7)^4} + C$   
 (5)  $\frac{4}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1} + C$   
 (6)  $\frac{1}{2}\log|4x-1| + C$   
 (7)  $\frac{1}{3}\sin(3x-1) + C$   
 (8)  $\frac{1}{5}\tan(5x+2) + C$   
 (9)  $4e^{\frac{1}{2}x+2} + C$   
 (10)  $\frac{5^{2x-1}}{2\log 5} + C$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad a \neq 0 \text{ のとき}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

## 解説

- (1) (与式)  $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}(5x+1)^5 + C$   
 $= \frac{1}{25}(5x+1)^5 + C$   
 (2) (与式)  $= 2 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6 + C$   
 $= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6 + C$   
 (3) (与式)  $= \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{7}(5-3x)^7 + C$   
 $= -\frac{1}{21}(5-3x)^7 + C$

- (4) (与式)  $= \int (2x-7)^{-5}dx$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-4}(2x-7)^{-4} + C$   
 $= -\frac{1}{8(2x-7)^4} + C$   
 (5) (与式)  $= \int (x+1)^{\frac{1}{4}}dx$   
 $= \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{4}} + C$   
 $= \frac{4}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1} + C$   
 (6) (与式)  $= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log|4x-1| + C$   
 $= \frac{1}{2}\log|4x-1| + C$   
 (7) (与式)  $= \frac{1}{3}\sin(3x-1) + C$   
 (8) (与式)  $= \frac{1}{5}\tan(5x+2) + C$   
 (9) (与式)  $= 4e^{\frac{1}{2}x+2} + C$   
 (10) (与式)  $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2x-1}}{\log 5} + C$   
 $= \frac{5^{2x-1}}{2\log 5} + C$



## 第83回

- (1)  $\frac{1}{20}(x+2)^4(8x+1)+C$   
 (2)  $\log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$   
 (3)  $-\frac{3x-1}{3(2x-3)^3} + C$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし } x=g(t)$$

## 解説

- (1)  $x+2=t$  とおくと  $x=t-2, dx=dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int (2t-2+1)t^3 dt \\ &= \int (2t-3)t^3 dt = \int (2t^4 - 3t^3) dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{1}{20}t^4(8t-15) + C \\ &= \frac{1}{20}(x+2)^4(8(x+2)-15) + C \\ &= \frac{1}{20}(x+2)^4(8x+1) + C \end{aligned}$$

- (2)  $x-1=t$  とおくと  $x=t+1, dx=dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{t+1}{t^2} dt = \int \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \log|t| - \frac{1}{t} + C \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

- (3)  $2x-3=t$  とおくと  $x=\frac{t+3}{2}, dx=\frac{1}{2}dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \left( 4 \cdot \frac{t+3}{2} + 1 \right) \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t+7}{t^4} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{2}{t^3} + \frac{7}{t^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{t^2} - \frac{7}{3t^3} \right) + C = -\frac{3t+7}{6t^3} + C \\ &= -\frac{3(2x-3)+7}{6(2x-3)^3} + C \\ &= -\frac{3x-1}{3(2x-3)^3} + C \end{aligned}$$

## 第84回

- (1)  $\frac{1}{4}(x+3)^7(x-1)+C$   
 (2)  $\log|x-5| - \frac{5}{x-5} + C$   
 (3)  $-\frac{27x-20}{18(3x-2)^3} + C$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし } x=g(t)$$

## 解説

- (1)  $x+3=t$  とおくと  $x=t-3, dx=dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int (2t-3-1)t^6 dt \\ &= \int (2t-7)t^6 dt = \int (2t^7 - 7t^6) dt \\ &= \frac{1}{4}t^8 - t^7 + C = \frac{1}{4}t^7(t-4) + C \\ &= \frac{1}{4}(x+3)^7((x+3)-4) + C \\ &= \frac{1}{4}(x+3)^7(x-1) + C \end{aligned}$$

- (2)  $x-5=t$  とおくと  $x=t+5, dx=dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{t+5}{t^2} dt = \int \left( \frac{1}{t} + \frac{5}{t^2} \right) dt \\ &= \log|t| - \frac{5}{t} + C \\ &= \log|x-5| - \frac{5}{x-5} + C \end{aligned}$$

- (3)  $3x-2=t$  とおくと  $x=\frac{t+2}{3}, dx=\frac{1}{3}dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \left( 9 \cdot \frac{t+2}{3} - 7 \right) \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3t-1}{t^4} dt = \frac{1}{3} \int \left( \frac{3}{t^3} - \frac{1}{t^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \left( -\frac{3}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} \right) + C \\ &= \frac{-9t+2}{18t^3} + C = \frac{-9(3x-2)+2}{18(3x-2)^3} + C \\ &= -\frac{27x-20}{18(3x-2)^3} + C \end{aligned}$$

## 第85回

- (1)  $\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$   
 (2)  $\frac{2}{3}(2x+7)\sqrt{x-1}+C$   
 (3)  $-\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{2-x}+C$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし } x=g(t)$$

## 解説

- (1)  $\sqrt{x+1}=t$  とおくと,  $x+1=t^2$  から  
 $x=t^2-1, dx=2tdt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int (t^2-1)t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4-t^2) dt \\ &= 2 \left( \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \right) + C = \frac{2}{15}t^3(3t^2-5) + C \\ &= \frac{2}{15}(x+1)\sqrt{x+1}\{3(x+1)-5\} + C \\ &= \frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

- (2)  $\sqrt{x-1}=t$  とおくと,  $x-1=t^2$  から  
 $x=t^2+1, dx=2tdt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{2(t^2+1)+1}{t} \cdot 2tdt = 2 \int (2t^2+3) dt \\ &= 2 \left( \frac{2}{3}t^3 + 3t \right) + C = \frac{2}{3}t(2t^2+9) + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x-1}\{2(x-1)+9\} + C \\ &= \frac{2}{3}(2x+7)\sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

- (3)  $\sqrt{2-x}=t$  とおくと,  $2-x=t^2$  から  
 $x=2-t^2, dx=(-2t)dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{2-t^2}{t} \cdot (-2t)dt = 2 \int (t^2-2) dt \\ &= 2 \left( \frac{1}{3}t^3 - 2t \right) + C = \frac{2}{3}t(t^2-6) + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2-x}\{(2-x)-6\} + C \\ &= -\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{2-x} + C \end{aligned}$$

## 第86回

- (1)  $\frac{2}{5}(x-2)(x+3)\sqrt{x+3}+C$   
 (2)  $2(x-5)\sqrt{x+2}+C$   
 (3)  $-\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}+C$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし } x=g(t)$$

## 解説

- (1)  $\sqrt{x+3}=t$  とおくと,  $x+3=t^2$  から  
 $x=t^2-3, dx=2tdt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int (t^2-3)t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4-3t^2) dt \\ &= 2 \left( \frac{1}{5}t^5 - t^3 \right) + C = \frac{2}{5}t^3(t^2-5) + C \\ &= \frac{2}{5}(x+3)\sqrt{x+3}\{(x+3)-5\} + C \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)\sqrt{x+3} + C \end{aligned}$$

- (2)  $\sqrt{x+2}=t$  とおくと,  $x+2=t^2$  から  
 $x=t^2-2, dx=2tdt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{3(t^2-2)-1}{t} \cdot 2tdt = 2 \int (3t^2-7) dt \\ &= 2(t^3-7t) + C = 2t(t^2-7) + C \\ &= 2\sqrt{x+2}\{(x+2)-7\} + C \\ &= 2(x-5)\sqrt{x+2} + C \end{aligned}$$

- (3)  $\sqrt{4-x}=t$  とおくと,  $4-x=t^2$  から  
 $x=4-t^2, dx=(-2t)dt$   
 よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int \frac{4-t^2}{t} \cdot (-2t)dt = 2 \int (t^2-4) dt \\ &= 2 \left( \frac{1}{3}t^3 - 4t \right) + C = \frac{2}{3}t(t^2-12) + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4-x}\{(4-x)-12\} + C \\ &= -\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x} + C \end{aligned}$$

## 第87回

- (1)  $\frac{1}{6}(x^3+2)^6+C$  (2)  $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$   
 (3)  $\frac{1}{3}(\log x)^3+C$  (4)  $-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{ただし } g(x)=u$$

$$\int (g(x))^\alpha g'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}(g(x))^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$

解説

- (1)  $(x^3+2)'=3x^2$ であるから,  $x^3+2=u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int (x^3+2)^5 (x^3+2)' dx = \int u^5 du \\ &= \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(x^3+2)^6 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad \text{(与式)} &= \int (x^3+2)^5 (x^3+2)' dx \\ &= \frac{1}{6}(x^3+2)^6 + C \end{aligned}$$

- (2)  $(x^4)'=4x^3$ であるから,  $x^4=u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \frac{1}{4} \int e^{x^4} (x^4)' dx = \frac{1}{4} \int e^u du \\ &= \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{x^4} + C \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad \text{(与式)} = \frac{1}{4} \int e^{x^4} (x^4)' dx = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$$

- (3)  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であるから,  $\log x = u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int (\log x)^2 (\log x)' dx = \int u^2 du \\ &= \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\log x)^3 + C \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad \text{(与式)} = \int (\log x)^2 (\log x)' dx = \frac{1}{3}(\log x)^3 + C$$

- (4)  $(\cos x)' = -\sin x$ であるから,  $\cos x = u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= - \int \cos^4 x (\cos x)' dx = - \int u^4 du \\ &= -\frac{1}{5}u^5 + C = -\frac{1}{5}\cos^5 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad \text{(与式)} &= - \int \cos^4 x (\cos x)' dx \\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C \end{aligned}$$

## 第88回

- (1)  $\frac{1}{5}(x^2-3)^5+C$  (2)  $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$   
 (3)  $\frac{1}{5}(\log x)^5+C$  (4)  $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{ただし } g(x)=u$$

$$\int (g(x))^\alpha g'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}(g(x))^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$

解説

- (1)  $(x^2-3)'=2x$ であるから,  $x^2-3=u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int (x^2-3)^4 (x^2-3)' dx = \int u^4 du \\ &= \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x^2-3)^5 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad \text{(与式)} &= \int (x^2-3)^4 (x^2-3)' dx \\ &= \frac{1}{5}(x^2-3)^5 + C \end{aligned}$$

- (2)  $(x^3)'=3x^2$ であるから,  $x^3=u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \frac{1}{3} \int e^{x^3} (x^3)' dx = \frac{1}{3} \int e^u du \\ &= \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad \text{(与式)} = \frac{1}{3} \int e^{x^3} (x^3)' dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

- (3)  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であるから,  $\log x = u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int (\log x)^4 (\log x)' dx = \int u^4 du \\ &= \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(\log x)^5 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad \text{(与式)} &= \int (\log x)^4 (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{5}(\log x)^5 + C \end{aligned}$$

- (4)  $(\sin x)' = \cos x$ であるから,  $\sin x = u$ と  
と

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad \text{(与式)} &= \int \sin^3 x (\sin x)' dx \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x + C \end{aligned}$$

## 第89回

- (1)  $\log|x^2-1|+C$   
 (2)  $\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+4|+C$   
 (3)  $\log|\tan x|+C$   
 (4)  $-\log|1+\cos x|+C$   
 (5)  $\log|e^x+e^{-x}|+C$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$$

解説

$$\begin{aligned} \text{(1) (与式)} &= \int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} dx \\ &= \log|x^2-1| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) (与式)} &= \frac{1}{3} \int \frac{(x^3+3x^2+4)'}{x^3+3x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x^3+3x^2+4| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) (与式)} &= \int \frac{(\tan x)'}{\tan x} dx \\ &= \log|\tan x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4) (与式)} &= - \int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx \\ &= -\log|1+\cos x| + C \\ &= (-\log(1+\cos x) + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{注} \quad &-1 \leq \cos x \leq 1 \text{であるから} \\ &1+\cos x \geq 0 \\ \text{また, 分母は0でないから} \quad &1+\cos x \neq 0 \\ \text{よって} \quad &1+\cos x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(5) (与式)} &= \int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}} dx \\ &= \log|e^x+e^{-x}| + C \\ &= (\log(e^x+e^{-x}) + C) \end{aligned}$$

$$\text{注} \quad e^x > 0, e^{-x} > 0 \text{であるから} \\ e^x + e^{-x} > 0$$

## 第90回

- (1)  $\log|x^3+1|+C$   
 (2)  $\frac{1}{2}\log|x^2+4x+1|+C$   
 (3)  $\log|\log x|+C$   
 (4)  $-\log|\sin x+\cos x|+C$   
 (5)  $-\log|e^{-x}+3|+C$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$$

解説

$$\begin{aligned} \text{(1) (与式)} &= \int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} dx \\ &= \log|x^3+1| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) (与式)} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+1)'}{x^2+4x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|x^2+4x+1| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) (与式)} &= \int \frac{(\log x)'}{\log x} dx \\ &= \log|\log x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4) (与式)} &= - \int \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x} dx \\ &= -\log|\sin x+\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(5) (与式)} &= - \int \frac{(e^{-x}+3)'}{e^{-x}+3} dx \\ &= -\log|e^{-x}+3| + C \\ &= (-\log(e^{-x}+3) + C) \end{aligned}$$

$$\text{注} \quad e^{-x} > 0 \text{であるから} \\ e^{-x} + 3 > 0$$



## 第91回

- (1)  $(x-1)e^x + C$
- (2)  $-(x-1)\cos x + \sin x + C$
- (3)  $-(3x+2)e^{-x} + C$
- (4)  $(x+2)\log(x+2) - x + C$
- (5)  $-\frac{1}{4x^2}(2\log x + 1) + C$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

解説

$$(1) \text{ (与式)} = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx \\ = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

$$(2) \text{ (与式)} = \int (x-1)(-\cos x)'dx \\ = -(x-1)\cos x + \int \cos x dx \\ = -(x-1)\cos x + \sin x + C$$

$$(3) \text{ (与式)} = \int (3x-1)(-e^{-x})'dx \\ = -(3x-1)e^{-x} + \int 3e^{-x} dx \\ = -(3x-1)e^{-x} - 3e^{-x} + C \\ = -(3x+2)e^{-x} + C$$

$$(4) \text{ (与式)} = \int (x+2)\log(x+2)dx \\ = (x+2)\log(x+2) - \int (x+2) \cdot \frac{1}{x+2} dx \\ = (x+2)\log(x+2) - \int dx \\ = (x+2)\log(x+2) - x + C$$

$$(5) \text{ (与式)} = \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \log x dx \\ = -\frac{1}{2x^2} \log x + \int \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ = -\frac{1}{2x^2} \log x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx \\ = -\frac{1}{2x^2} \log x - \frac{1}{4x^2} + C \\ = -\frac{1}{4x^2}(2\log x + 1) + C$$

## 第92回

- (1)  $x\sin x + \cos x + C$
- (2)  $(x+2)e^x + C$
- (3)  $-\frac{1}{3}(2x-1)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x + C$
- (4)  $(x-3)\log(x-3) - x + C$
- (5)  $-\frac{1}{9x^3}(3\log x + 1) + C$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

解説

$$(1) \text{ (与式)} = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int \sin x dx \\ = x\sin x + \cos x + C$$

$$(2) \text{ (与式)} = \int (x+3)(e^x)'dx \\ = (x+3)e^x - \int e^x dx \\ = (x+3)e^x - e^x + C \\ = (x+2)e^x + C$$

$$(3) \text{ (与式)} = \int (2x-1)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'dx \\ = -\frac{1}{3}(2x-1)\cos 3x + \int 2 \cdot \frac{1}{3}\cos 3x dx \\ = -\frac{1}{3}(2x-1)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x + C$$

$$(4) \text{ (与式)} = \int (x-3)\log(x-3)dx \\ = (x-3)\log(x-3) - \int (x-3) \cdot \frac{1}{x-3} dx \\ = (x-3)\log(x-3) - \int dx \\ = (x-3)\log(x-3) - x + C$$

$$(5) \text{ (与式)} = \int \left(-\frac{1}{3x^3}\right)' \log x dx \\ = -\frac{1}{3x^3} \log x + \int \frac{1}{3x^3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ = -\frac{1}{3x^3} \log x + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^4} dx \\ = -\frac{1}{3x^3} \log x - \frac{1}{9x^3} + C \\ = -\frac{1}{9x^3}(3\log x + 1) + C$$

## 第93回

- (1)  $\frac{1}{9}(6x-5)e^{3x} + C$
- (2)  $\frac{1}{2}(4x-1)\sin 2x + \cos 2x + C$
- (3)  $\frac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5) - x + C$
- (4)  $\frac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3) - \frac{1}{2}x^2 + C$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

解説

$$(1) \text{ (与式)} = \int (2x-1)\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'dx \\ = \frac{1}{3}(2x-1)e^{3x} - \int 2 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx \\ = \frac{1}{3}(2x-1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C \\ = \frac{1}{9}(6x-5)e^{3x} + C$$

$$(2) \text{ (与式)} = \int (4x-1)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx \\ = \frac{1}{2}(4x-1)\sin 2x - \int 4 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x dx \\ = \frac{1}{2}(4x-1)\sin 2x + \cos 2x + C$$

$$(3) \text{ (与式)} = \int \left[\frac{1}{3}(3x+5)\right]' \log(3x+5) dx \\ = \frac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5) - \int \frac{1}{3}(3x+5) \cdot \frac{3}{3x+5} dx \\ = \frac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5) - \int dx \\ = \frac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5) - x + C$$

$$(4) \text{ (与式)} = \int \left[\frac{1}{2}(x^2+3)\right]' \log(x^2+3) dx \\ = \frac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3) - \int \frac{1}{2}(x^2+3) \cdot \frac{2x}{x^2+3} dx \\ = \frac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3) - \int x dx \\ = \frac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

## 第94回

- (1)  $-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C$
- (2)  $(3x+1)e^{2x} + C$
- (3)  $\frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - x + C$
- (4)  $(e^x+2)\log(e^x+2) - e^x + C$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

解説

$$(1) \text{ (与式)} = \int (3x-1)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx \\ = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \int 3 \cdot \frac{1}{2}\cos 2x dx \\ = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C$$

$$(2) \text{ (与式)} = \int (6x+5)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx \\ = \frac{1}{2}(6x+5)e^{2x} - \int 6 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx \\ = \frac{1}{2}(6x+5)e^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + C \\ = (3x+1)e^{2x} + C$$

$$(3) \text{ (与式)} = \int \left[\frac{1}{4}(4x-1)\right]' \log(4x-1) dx \\ = \frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - \int \frac{1}{4}(4x-1) \cdot \frac{4}{4x-1} dx \\ = \frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - \int dx \\ = \frac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1) - x + C$$

$$(4) \text{ (与式)} = \int (e^x+2)\log(e^x+2)dx \\ = (e^x+2)\log(e^x+2) - \int (e^x+2) \cdot \frac{e^x}{e^x+2} dx \\ = (e^x+2)\log(e^x+2) - \int e^x dx \\ = (e^x+2)\log(e^x+2) - e^x + C$$

## 第95回

- (1)  $x+2\log|x+1|+C$   
 (2)  $\frac{1}{2}x^2+3x+7\log|x-1|+C$   
 (3)  $\frac{1}{5}\log\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$   
 (4)  $\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$   
 (5)  $\log|x+1|(x-1)^2+C$

(分子の次数)<(分母の次数)と変形  
部分分数に分解

## 解説

- (1) (与式)  $= \int \frac{(x+1)+2}{x+1} dx$   
 $= \int \left(1 + \frac{2}{x+1}\right) dx$   
 $= x + 2\log|x+1| + C$   
 (2) (与式)  $= \int \frac{(x-1)(x+3)+7}{x-1} dx$   
 $= \int \left(x+3 + \frac{7}{x-1}\right) dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 7\log|x-1| + C$   
 (3) (与式)  $= \int \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right) dx$   
 $= \frac{1}{5}(\log|x-2| - \log|x+3|) + C$   
 $= \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C$   
 (4) (与式)  $= \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$   
 $= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$   
 $= \frac{1}{3}(\log|x-1| - \log|x+2|) + C$   
 $= \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$   
 (5) (与式)  $= \int \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} dx$   
 $= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}\right) dx$   
 $= \log|x+1| + 2\log|x-1| + C$   
 $= \log|x+1||x-1|^2 + C$   
 $= \log|x+1|(x-1)^2 + C$

## 第96回

- (1)  $x+3\log|x+2|+C$   
 (2)  $\frac{1}{2}x^2-x-5\log|x-3|+C$   
 (3)  $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$   
 (4)  $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$   
 (5)  $\log|x+2|^3(x-2)^2+C$

(分子の次数)<(分母の次数)と変形  
部分分数に分解

## 解説

- (1) (与式)  $= \int \frac{(x+2)+3}{x+2} dx$   
 $= \int \left(1 + \frac{3}{x+2}\right) dx$   
 $= x + 3\log|x+2| + C$   
 (2) (与式)  $= \int \frac{(x-3)(x-1)-5}{x-3} dx$   
 $= \int \left(x-1 - \frac{5}{x-3}\right) dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2 - x - 5\log|x-3| + C$   
 (3) (与式)  $= \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) dx$   
 $= \frac{1}{4}(\log|x-1| - \log|x+3|) + C$   
 $= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$   
 (4) (与式)  $= \int \frac{dx}{(x+1)(x-5)}$   
 $= \int \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right) dx$   
 $= \frac{1}{6}(\log|x-5| - \log|x+1|) + C$   
 $= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C$   
 (5) (与式)  $= \int \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} dx$   
 $= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}\right) dx$   
 $= 3\log|x+2| + 2\log|x-2| + C$   
 $= \log|x+2|^3|x-2|^2 + C$   
 $= \log|x+2|^3(x-2)^2 + C$

## 第97回

- (1)  $x - \sin x + C$   
 (2)  $x + \cos x + C$   
 (3)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$   
 (4)  $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$   
 (5)  $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

三角関数の公式を用いて、次数を下げる

## 解説

- (1) (与式)  $= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$   
 $= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \cos x} dx$   
 $= \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C$   
 (2) (与式)  $= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$   
 $= \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C$   
 (3) (与式)  $= \int \sin^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \cos^2 x dx$   
 $= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$   
 $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$   
 (4) (与式)  $= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx$   
 $= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$   
 (5) (与式)  $= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$   
 $\sin x = t$  とおくと  $\cos x dx = dt$   
 (与式)  $= \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$   
 $= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

- (別解) (与式)  $= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$   
 $= \int \sin^2 x \cos x dx - \int \sin^4 x \cos x dx$   
 $= \int \sin^2 x (\sin x)' dx - \int \sin^4 x (\sin x)' dx$   
 $= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

## 第98回

- (1)  $x - \cos x + C$   
 (2)  $x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$   
 (3)  $x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$   
 (4)  $-\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$   
 (5)  $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

三角関数の公式を用いて、次数を下げる

## 解説

- (1) (与式)  $= \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} dx$   
 $= \int \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} dx$   
 $= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C$   
 (2) (与式)  $= \int (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x) dx$   
 $= \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$   
 (3) (与式)  $= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2\sin x \cos x dx$   
 $= 2 \int \sin^2 x dx = 2 \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$   
 $= x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$   
 (4) (与式)  $= -\frac{1}{2} \int (\cos 8x - \cos 6x) dx$   
 $= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$   
 (5) (与式)  $= \int (1 - \cos^2 x) \cos^3 x \sin x dx$   
 $\cos x = t$  とおくと  $-\sin x dx = dt$   
 (与式)  $= - \int (1 - t^2)t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C$   
 $= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C$

- (別解) (与式)  $= \int (1 - \cos^2 x) \cos^3 x \sin x dx$   
 $= \int \cos^3 x \sin x dx - \int \cos^5 x \sin x dx$   
 $= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C$   
 $= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C$



## 第99回

- (1)  $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$   
 (2)  $x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$   
 (3)  $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

部分積分法を利用しても、まだ積の形が残るときは、更に部分積分法を利用する

## 解説

- (1) (与式)  $= \int x^2(-e^{-x})' dx$   
 $= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx$   
 $= -x^2e^{-x} + 2 \int x(-e^{-x})' dx$   
 $= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$   
 $= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$   
 $= -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$
- (2) (与式)  $= \int (x)'(\log x)^2 dx$   
 $= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx$   
 $= x(\log x)^2 - 2 \int (\log x) dx$   
 $= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx$   
 $= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2 \int dx$   
 $= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$
- (3) (与式)  $= \int (e^x)' \sin x dx$   
 $= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$   
 $= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx$   
 $= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x) dx$   
 $= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$   
 ゆえに  $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$
- 別解  $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x \dots\dots ①$   
 $(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x \dots\dots ②$   
 ①-②より  $(e^x \sin x - e^x \cos x)' = 2e^x \sin x$   
 ゆえに  $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

## 第100回

- (1)  $\frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{4}x^2 + C$   
 (2)  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$   
 (3)  $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

部分積分法を利用しても、まだ積の形が残るときは、更に部分積分法を利用する

## 解説

- (1) (与式)  $= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'(\log x)^2 dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \int x \log x dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \log x + \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{2} \int x dx$   
 $= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{4}x^2 + C$
- (2) (与式)  $= \int x^2(-\cos x)' dx$   
 $= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$   
 $= -x^2 \cos x + 2 \int x(\sin x)' dx$   
 $= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$   
 $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$
- (3) (与式)  $= \int (e^x)' \cos x dx$   
 $= e^x \cos x - \int e^x(-\sin x) dx$   
 $= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx$   
 $= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$   
 ゆえに  $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$
- 別解  $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x \dots\dots ①$   
 $(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x \dots\dots ②$   
 ①+②より  $(e^x \sin x + e^x \cos x)' = 2e^x \cos x$   
 ゆえに  $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

## 第101回

- (1)  $-\frac{2}{27}(3x+11)\sqrt{1-3x}+C$   
 (2)  $-\frac{1}{2e^{x^2-2x}}+C$   
 (3)  $-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x + \sin 2x + C$

## 解説

- (1)  $\sqrt{1-3x}=t$  とおくと、 $1-3x=t^2$  から  
 $x=\frac{1-t^2}{3}$ ,  $dx=-\frac{2}{3}t dt$   
 よって  
 (与式)  $= \int \frac{\frac{1-t^2}{3}+1}{t} \cdot \left(-\frac{2}{3}t\right) dt$   
 $= \frac{2}{9} \int (t^2-4) dt$   
 $= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}t^3-4t\right) + C$   
 $= \frac{2}{27}t(t^2-12) + C$   
 $= \frac{2}{27}\sqrt{1-3x}[(1-3x)-12] + C$   
 $= -\frac{2}{27}(3x+11)\sqrt{1-3x} + C$
- (2)  $(x^2-2x)' = 2x-2$  であるから、 $x^2-2x=u$  とおくと  
 (与式)  $= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-2x)'}{e^{x^2-2x}} dx$   
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^u} du = \frac{1}{2} \int e^{-u} du$   
 $= -\frac{1}{2} e^{-u} + C = -\frac{1}{2e^{x^2-2x}} + C$
- (3) (与式)  $= \int (4x+1)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' dx$   
 $= -\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x + \int 4 \cdot \frac{1}{2}\cos 2x dx$   
 $= -\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x + 2 \int \cos 2x dx$   
 $= -\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x + \sin 2x + C$

## 第102回

- (1)  $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \log|x| + C$   
 (2)  $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$   
 (3)  $\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right| + C$

## 解説

- (1) (与式)  $= \int (x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{6}})' dx$   
 $= \int (x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{5}{6}} + x^{-1}) dx$   
 $= \int (x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}) dx$   
 $= \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{12}{7}x^{\frac{3}{2}} + \log|x| + C$   
 $= \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \log|x| + C$   
 $\left(= \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \log x + C\right)$
- ② 被積分関数の形から  $x>0$  であり、 $\log|x|=\log x$  となる。
- (2) (与式)  $= \int (1-\cos^2 x)' \sin x dx$   
 $= \int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x dx$   
 $\cos x=t$  とおくと  $-\sin x dx = dt$   
 (与式)  $= -\int (1-2t^2+t^4) dt$   
 $= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 - t + C$   
 $= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
- (3)  $e^x=t$  とおくと  $e^x dx = dt$   
 (与式)  $= \int \frac{dt}{t^2-9} = \int \frac{dt}{(t+3)(t-3)}$   
 $= \int \frac{1}{6} \left( \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt$   
 $= \frac{1}{6}(\log|t-3| - \log|t+3|) + C$   
 $= \frac{1}{6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C$   
 $= \frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right| + C$   
 $\left(= \frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right| + C\right)$

## 第103回

- (1)  $\frac{4}{9}$   
 (2)  $-\frac{7}{12}$   
 (3)  $\sqrt{2}-1$   
 (4)  $\frac{484}{5}$   
 (5)  $\frac{9\sqrt[3]{9}}{5}-10\sqrt[3]{3}+3$   
 (6)  $e-\frac{1}{e}-2$   
 (7)  $\frac{1}{3}\log\frac{8}{5}$   
 (8)  $\frac{1}{2}\log\frac{7}{3}$

$f(x)$  の不定積分の1つを  $F(x)$  とすると

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## 解説

- (1) (与式)  $= \int_1^3 x^{-3}dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^3$   
 $= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{4}{9}$   
 (2) (与式)  $= \int_1^0 t^{\frac{5}{2}}dt = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_1^0$   
 $= \frac{2}{7}(0-1) = -\frac{2}{7}$   
 (3) (与式)  $= \int_2^4 y^{-\frac{3}{2}}dy = \left[-2y^{-\frac{1}{2}}\right]_2^4$   
 $= -2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$   
 $= \sqrt{2}-1$   
 (4) (与式)  $= \int_1^9 x^{\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^9$   
 $= \frac{2}{5}(243-1)$   
 $= \frac{484}{5}$

$$(5) \text{ (与式)} = \int_0^3 (x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 1)dx$$

$$= \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 4 \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x\right]_0^3$$

$$= \frac{3}{5} \cdot 3^{\frac{5}{3}} - 3 \cdot 3^{\frac{4}{3}} + 3$$

$$= \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} - 10\sqrt[3]{3} + 3$$

$$(6) \text{ (与式)} = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int_1^e \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \left[x - 2\log x - \frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \left(e - 2 - \frac{1}{e}\right) - (1 - 1)$$

$$= e - \frac{1}{e} - 2$$

$$(7) \text{ (与式)} = \int_0^1 \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} [\log(x+1) - \log(x+4)]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \log \frac{x+1}{x+4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \left( \log \frac{2}{5} - \log \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \log \frac{8}{5}$$

$$(8) \text{ (与式)} = \int_2^8 \frac{dx}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \int_2^8 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} [\log(x-1) - \log(x+1)]_2^8$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \log \frac{x-1}{x+1} \right]_2^8$$

$$= \frac{1}{2} \left( \log \frac{7}{9} - \log \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{7}{3}$$

## 第104回

- (1)  $\frac{7}{24}$   
 (2)  $-\frac{10\sqrt[5]{4}}{7}$   
 (3)  $\frac{52}{81}$   
 (4)  $\frac{254}{7}$   
 (5)  $-\frac{19}{22}$   
 (6)  $e - \frac{9}{e} + 14$   
 (7)  $\frac{1}{2}\log\frac{35}{27}$   
 (8)  $\frac{1}{4}\log\frac{21}{13}$

$f(x)$  の不定積分の1つを  $F(x)$  とすると

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

## 解説

- (1) (与式)  $= \int_1^2 x^{-4}dx = \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^2$   
 $= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{24}$   
 (2) (与式)  $= \int_2^0 x^{\frac{2}{3}}dx = \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_2^0$   
 $= \frac{3}{5}(0-2^{\frac{5}{3}}) = -\frac{10\sqrt[3]{4}}{7}$   
 (3) (与式)  $= \int_1^9 y^{-\frac{3}{2}}dy = \left[-\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{2}}\right]_1^9$   
 $= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{27}-1\right) = \frac{52}{81}$   
 (4) (与式)  $= \int_1^4 x^{\frac{5}{2}}dx = \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_1^4$   
 $= \frac{2}{7}(128-1) = \frac{254}{7}$

$$(5) \text{ (与式)} = \int_0^1 (x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 3)dx$$

$$= \left[\frac{3}{11}x^{\frac{7}{3}} - 6 \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 3x\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{11} - \frac{9}{2} + 3$$

$$= \frac{14-99+66}{22}$$

$$= -\frac{19}{22}$$

$$(6) \text{ (与式)} = \int_1^e \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int_1^e \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) dx$$

$$= \left[x + 6\log x - \frac{9}{x}\right]_1^e$$

$$= \left(e + 6 - \frac{9}{e}\right) - (1 - 9)$$

$$= e - \frac{9}{e} + 14$$

$$(7) \text{ (与式)} = \int_2^6 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} [\log(x+1) - \log(x+3)]_2^6$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \log \frac{x+1}{x+3} \right]_2^6$$

$$= \frac{1}{2} \left( \log \frac{7}{9} - \log \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{35}{27}$$

$$(8) \text{ (与式)} = \int_5^{11} \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \int_5^{11} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} [\log(x-2) - \log(x+2)]_5^{11}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \log \frac{x-2}{x+2} \right]_5^{11}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \log \frac{9}{13} - \log \frac{3}{7} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \log \frac{21}{13}$$



第105回 (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\sqrt{3}-1$ 

(3)  $\frac{7}{\log 2}$  (4) 2 (5)  $\frac{\pi}{4}$

(6)  $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{12}$  (7)  $\frac{1}{8}$

 $f(x)$  の不定積分の1つを  $F(x)$  とすると

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

解説

(1) (与式)  $= \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$

(2) (与式)  $= \left[ \tan t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}-1$

(3) (与式)  $= \left[ \frac{2^x}{\log 2} \right]_0^3 = \frac{8-1}{\log 2} = \frac{7}{\log 2}$

(4) (与式)  $= \left[ -2 \cos x + \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$   
 $= (-2 \cdot 0 + 1) - (-2 \cdot 0 - 1) = 2$

(5) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$   
 $= \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

(6) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos^2 3x} - 1 \right) dx$   
 $= \left[ \frac{1}{3} \tan 3x - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{12}$

(7) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx$   
 $= \left[ -\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{8}$

第106回 (1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\sqrt{3}-1$ 

(3)  $\frac{1}{2}(e^4-1)$  (4) 4 (5)  $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

(6)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{24}$  (7)  $\frac{1}{2}$

 $f(x)$  の不定積分の1つを  $F(x)$  とすると

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

解説

(1) (与式)  $= \left[ \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$

(2) (与式)  $= \left[ -\frac{1}{\tan t} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left( \frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)$   
 $= \sqrt{3}-1$

(3) (与式)  $= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4-1)$

(4) (与式)  $= \left[ 2 \sin x - 3 \cos x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) - (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0) = 4$

(5) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

(6) (与式)  $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos^2 2x} - 1 \right) dx$   
 $= \left[ \frac{1}{2} \tan 2x - x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$   
 $= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{24}$

(7) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$

第107回

(1) 10

(2)  $\frac{106}{15}$

(3)  $\log \frac{e+1}{2}$

 $x=g(t)$  とおき,  $a=g(\alpha)$ ,  $b=g(\beta)$  ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

解説

(1)  $2x-1=t$  とおくと 

$x$	0	$\rightarrow$	2
$t$	-1	$\rightarrow$	3

$x = \frac{t+1}{2}, dx = \frac{1}{2} dt$

(与式)  $= \int_{-1}^3 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_{-1}^3$   
 $= \frac{1}{8}(81-1) = 10$

別解 (与式)  $= \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x-1)^4 \right]_0^2 = \frac{1}{8}(81-1) = 10$

(2)  $\sqrt{4-x}=t$  とおくと 

$x$	0	$\rightarrow$	3
$t$	2	$\rightarrow$	1

$x = 4-t^2, dx = -2t dt$

(与式)  $= \int_2^1 \frac{(4-t^2)^2}{t} \cdot (-2t) dt$   
 $= 2 \int_1^2 (t^4 - 8t^2 + 16) dt$   
 $= 2 \left[ \frac{1}{5} t^5 - \frac{8}{3} t^3 + 16t \right]_1^2$   
 $= 2 \left\{ \left( \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) - \left( \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 \right) \right\}$   
 $= \frac{106}{15}$

(3)  $e^x+1=t$  とおくと 

$x$	0	$\rightarrow$	1
$t$	2	$\rightarrow$	$e+1$

$e^x dx = dt$

(与式)  $= \int_2^{e+1} \frac{1}{t} dt = [\log t]_2^{e+1}$   
 $= \log(e+1) - \log 2 = \log \frac{e+1}{2}$

別解 (与式)  $= \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = [\log(e^x+1)]_0^1$   
 $= \log(e+1) - \log 2 = \log \frac{e+1}{2}$

第108回

(1)  $\frac{11}{5}$

(2)  $\frac{46}{15}$

(3)  $\frac{1}{3}$

 $x=g(t)$  とおき,  $a=g(\alpha)$ ,  $b=g(\beta)$  ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

解説

(1)  $3x-2=t$  とおくと 

$x$	0	$\rightarrow$	1
$t$	-2	$\rightarrow$	1

$x = \frac{t+2}{3}, dx = \frac{1}{3} dt$

(与式)  $= \int_{-2}^1 t^4 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{5} t^5 \right]_{-2}^1$   
 $= \frac{1}{15}(1-(-32)) = \frac{11}{5}$

別解 (与式)  $= \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} (3x-2)^5 \right]_0^1$   
 $= \frac{1}{15}(1-(-32)) = \frac{11}{5}$

(2)  $\sqrt{x+2}=t$  とおくと 

$x$	-1	$\rightarrow$	2
$t$	1	$\rightarrow$	2

$x = t^2-2, dx = 2t dt$

(与式)  $= \int_1^2 (t^2-2)t \cdot 2t dt$   
 $= 2 \int_1^2 (t^4 - 2t^2) dt = 2 \left[ \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 \right]_1^2$   
 $= 2 \left\{ \left( \frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) - \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right) \right\}$   
 $= \frac{46}{15}$

(3)  $\sin x = t$  とおくと 

$x$	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
$t$	0	$\rightarrow$	1

$\cos x dx = dt$

(与式)  $= \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

別解 (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (\sin x)' dx$   
 $= \left[ \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$

## 第109回

- (1)  $\pi$   
 (2)  $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$   
 (3)  $\frac{\pi}{16}$

$\sqrt{a^2 - x^2}$  の定積分は  $x = a \sin \theta$  とおく  
 $\frac{1}{x^2 + a^2}$  の定積分は  $x = a \tan \theta$  とおく

## 解説

- (1)  $x = 2 \sin \theta$  とおくと  
 $dx = 2 \cos \theta d\theta$

また,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき

$\cos \theta \geq 0$  であるから

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} \\ = \sqrt{4 \cos^2 \theta} = 2 \cos \theta$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta) 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

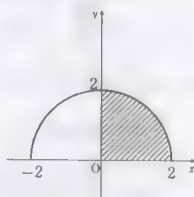
別解  $y = \sqrt{4 - x^2}$  のグラフは, 下の図のような半円を表す。

したがって, 定積分

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx \text{ は右の}$$

図の斜線部分の面積に  
等しいから

$$(\text{与式}) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$



- (2)  $x = \sin \theta$  とおく  
 $dx = \cos \theta d\theta$

また,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$  のとき

$$\begin{aligned} \cos \theta > 0 \text{ であるから} \\ \sqrt{1 - x^2} &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

- (3)  $x = 4 \tan \theta$  とおく

$$dx = \frac{4}{\cos^2 \theta} d\theta$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{16(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{4}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} d\theta = \left[ \frac{1}{4} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

$x$	$0 \rightarrow \frac{1}{2}$
$\theta$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

$x$	$0 \rightarrow 4$
$\theta$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

## 第110回

- (1)  $\frac{3}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8}$   
 (2)  $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (3)  $\frac{7}{12}\pi$

$\sqrt{a^2 - x^2}$  の定積分は  $x = a \sin \theta$  とおく  
 $\frac{1}{x^2 + a^2}$  の定積分は  $x = a \tan \theta$  とおく

## 解説

- (1)  $x = 3 \sin \theta$  とおく  
 $dx = 3 \cos \theta d\theta$

また,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$  のとき

$\cos \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{9 \cos^2 \theta} = 3 \cos \theta \end{aligned}$$

ゆえに (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 \cos \theta) 3 \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} &= 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 9 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

別解  $y = \sqrt{9 - x^2}$  のグラフは, 下の図のような半円を表す。

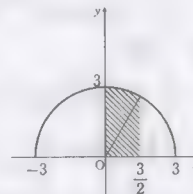
したがって, 定積分

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9 - x^2} dx \text{ は右の}$$

図の斜線部分の面積に  
等しいから

(与式)

$$= \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8}$$



- (2)  $x = 2 \sin \theta$  とおく  
 $dx = 2 \cos \theta d\theta$

また,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  のとき

$\cos \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - x^2} &= \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \theta} = 2 \cos \theta \end{aligned}$$

ゆえに (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

- (3)  $x = \tan \theta$  とおく

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[ \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{7}{12}\pi \end{aligned}$$

$x$	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
$\theta$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$x$	$-1 \rightarrow \sqrt{3}$
$\theta$	$-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{3}$



第111回 (1)  $\pi$  (2)  $2e^3$ 

(3)  $-\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  (4)  $\frac{\pi}{2} - 4$  (5)  $\frac{64}{3}$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説 (1) (与式)  $= \int_0^{\pi} x(-\cos x)'dx$

$$= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$= \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

(2) (与式)  $= \int_1^3 x(e^x)'dx = [xe^x]_1^3 - \int_1^3 e^x dx$

$$= 3e^3 - e - [e^x]_1^3 = 3e^3 - e - (e^3 - e)$$

$$= 2e^3$$

(3) (与式)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( -\cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \right)' dx$$

$$= [-x\cos(x - \frac{\pi}{3})]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x - \frac{\pi}{3}) dx$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \left[ \sin(x - \frac{\pi}{3}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-3)(\sin x)'dx$

$$= [(x-3)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - 3 - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 3 - 1 = \frac{\pi}{2} - 4$$

(5) (与式)  $= \int_{-1}^3 (x+1) \left( \frac{1}{3}(x-3)^3 \right)' dx$

$$= \left[ \frac{1}{3}(x+1)(x-3)^3 \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 \frac{1}{3}(x-3)^3 dx$$

$$= -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{4}(x-3)^4 \right]_{-1}^3$$

$$= -\frac{1}{12} [0 - (-4)^4] = \frac{64}{3}$$

第112回 (1)  $-2$  (2)  $2\log 2 - \frac{3}{4}$ 

(3)  $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$  (4)  $\frac{21}{16}$  (5)  $-\frac{243}{20}$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説 (1) (与式)  $= \int_0^{\pi} x(\sin x)'dx$

$$= [x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= -[-\cos x]_0^{\pi} = -2$$

(2) (与式)

$$= \int_1^2 \left( \frac{1}{2}x^2 \right)' \log x dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2}x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2\log 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{4}(4-1) = 2\log 2 - \frac{3}{4}$$

(3) (与式)  $= \int_0^1 x \left( \frac{1}{2}e^{2x} \right)' dx$

$$= \left[ \frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

(4) (与式)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} (x+5) \left( -\frac{1}{4}\cos 4x \right)' dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{4}(x+5)\cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{4}\cos 4x dx$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4}\sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{5}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$$

(5) (与式)

$$= \int_{-2}^1 (x+2) \left( \frac{1}{4}(x-1)^4 \right)' dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}(x+2)(x-1)^4 \right]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 \frac{1}{4}(x-1)^4 dx$$

$$= -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{5}(x-1)^5 \right]_{-2}^1 = -\frac{1}{20} [0 - (-3)^5] = -\frac{243}{20}$$

第113回

(1)  $4\log 2 - \frac{15}{16}$  (2)  $1 - \frac{2}{e}$   
(3)  $3\log 3 - 2$  (4)  $e - 2$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説 (1) (与式)  $= \int_1^2 \left( \frac{1}{4}x^4 \right)' \log x dx$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 4\log 2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 dx$$

$$= 4\log 2 - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2$$

$$= 4\log 2 - \frac{15}{16}$$

(2) (与式)  $= \int_1^e \left( -\frac{1}{x} \right)' \log x dx$

$$= \left[ -\frac{1}{x} \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} - \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = 1 - \frac{2}{e}$$

(3) (与式)

$$= \int_{-2}^0 (x+3) \log(x+3) dx$$

$$= \left[ (x+3) \log(x+3) \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (x+3) \cdot \frac{1}{x+3} dx$$

$$= 3\log 3 - \int_{-2}^0 dx = 3\log 3 - [x]_{-2}^0$$

$$= 3\log 3 - 2$$

(4) (与式)  $= \int_0^1 x^2(e^x)'dx$

$$= \left[ x^2e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$$

$$= e - 2 \int_0^1 x(e^x)'dx$$

$$= e - 2 \left[ xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - 2e + 2 \left[ e^x \right]_0^1$$

$$= -e + 2(e-1) = e-2$$

第114回

(1)  $9\log 3 - \frac{26}{9}$  (2)  $\frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$   
(3)  $5\log 5 - 4$  (4)  $\pi^2 - 4$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説 (1) (与式)  $= \int_1^3 \left( \frac{1}{3}x^3 \right)' \log x dx$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 \log x \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 9\log 3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx$$

$$= 9\log 3 - \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 = 9\log 3 - \frac{26}{9}$$

(2) (与式)  $= \int_1^e \left( -\frac{1}{2x^2} \right)' \log x dx$

$$= \left[ -\frac{1}{2x^2} \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{dx}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

(3) (与式)

$$= \int_{-3}^1 (x+4) \log(x+4) dx$$

$$= \left[ (x+4) \log(x+4) \right]_{-3}^1 - \int_{-3}^1 (x+4) \cdot \frac{1}{x+4} dx$$

$$= 5\log 5 - \int_{-3}^1 dx = 5\log 5 - [x]_{-3}^1$$

$$= 5\log 5 - 4$$

(4) (与式)  $= \int_0^{\pi} x^2(-\cos x)'dx$

$$= \left[ -x^2\cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos x dx$$

$$= \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x(\sin x)'dx$$

$$= \pi^2 + 2 \left[ x\sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= \pi^2 - 2[-\cos x]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$$

## 第115回

(1)  $5-4\sqrt{2}+\log 2$

(2)  $-\frac{4}{3}$

(3)  $\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}$

(4)  $\frac{\pi}{6}$

(5)  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\log \frac{1}{2}$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (与式)} &= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx \\
 &= \int_1^2 \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) dx \\
 &= \left[x - 4x^{\frac{1}{2}} + \log x\right]_1^2 \\
 &= (2 - 4\sqrt{2} + \log 2) - (1 - 4) \\
 &= 5 - 4\sqrt{2} + \log 2
 \end{aligned}$$

(2)  $\sqrt{x+1}=t$  とおくと

$x=t^2-1, dx=2tdt$

(与式)  $= \int_1^2 \frac{(t^2-1)-2}{t} \cdot 2tdt$

$= 2 \int_1^2 (t^2-3)dt$

$= 2 \left[ \frac{1}{3}t^3 - 3t \right]_1^2$

$= 2 \left( \left( \frac{8}{3} - 6 \right) - \left( \frac{1}{3} - 3 \right) \right) = -\frac{4}{3}$

(3)  $x^3+1=t$  とおくと

$3x^2dx=dt$

(与式)  $= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 e^{x^3+1} \cdot 3x^2dx$

$= \frac{1}{3} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} [e^t]_0^1 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}$

別解 (与式)  $= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 e^{x^3+1} \cdot (x^3+1)' dx$

$= \frac{1}{3} [e^{x^3+1}]_{-1}^0 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}$

$x$	$0 \rightarrow 3$
$t$	$1 \rightarrow 2$

$x$	$-1 \rightarrow 0$
$t$	$0 \rightarrow 1$

(4)  $x=3\sin \theta$  とおくと

$dx=3\cos \theta d\theta$

また,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$  のとき

$\cos \theta > 0$  であるから

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 \theta}$

$= \sqrt{9\cos^2 \theta} = 3\cos \theta$

ゆえに (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3\cos \theta} \cdot 3\cos \theta d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

(5) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)' dx$

$= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + [\log(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \log \frac{1}{2}$

$\left( = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2 \right)$

$x$	$0 \rightarrow \frac{3}{2}$
$\theta$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

## 第116回

(1)  $4\sqrt{3}-2-3\log 3$

(2)  $\frac{8}{3}$

(3)  $\frac{2}{15}$

(4)  $\frac{\pi}{4}$

(5)  $1-\frac{3}{e}$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (与式)} &= \int_1^3 \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x} dx \\
 &= \int_1^3 \left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{x}\right) dx \\
 &= \left[x + 4x^{\frac{1}{2}} - 3\log x\right]_1^3 \\
 &= (3 + 4\sqrt{3} - 3\log 3) - (1 + 4) \\
 &= 4\sqrt{3} - 2 - 3\log 3
 \end{aligned}$$

(2)  $\sqrt{x+3}=t$  とおくと

$x=t^2-3, dx=2tdt$

(与式)  $= \int_1^2 \frac{(t^2-3)+2}{t} \cdot 2tdt$

$= 2 \int_1^2 (t^2-1)dt$

$= 2 \left[ \frac{1}{3}t^3 - t \right]_1^2$

$= 2 \left( \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{8}{3}$

(3) (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$

$\sin x = t$  とおくと

$\cos x dx = dt$

(与式)  $= \int_0^1 t^2(1-t^2)dt$

$= \int_0^1 (t^2 - t^4)dt$

$= \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

$x$	$-2 \rightarrow 1$
$t$	$1 \rightarrow 2$

$x$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$t$	$0 \rightarrow 1$

別解 (与式)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) (\sin x)' dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \sin^2 x (\sin x)' - \sin^4 x (\sin x)' \} dx$

$= \left[ \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

(4)  $x=2\tan \theta$  とおくと

$dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$

(与式)  $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta$

$= \left[ \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{4}$

(5) (与式)  $= \int_0^1 (2x-1)(-e^{-x})' dx$

$= \left[ -(2x-1)e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx$

$= -\left( \frac{1}{e} + 1 \right) + 2 \left[ -e^{-x} \right]_0^1$

$= -\frac{1}{e} - 1 - 2 \left( \frac{1}{e} - 1 \right)$

$= 1 - \frac{3}{e}$

$x$	$-2 \rightarrow 2$
$\theta$	$-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$



## 第117回

- (1) 10  
(2)  $e-1$   
(3)  $\frac{1}{2}\log 2$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

$$\text{ただし } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \Delta x$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= \int_0^1 (2x+1)^3 dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x+1)^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} (81-1) = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (与式)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{e^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 \\ &= e-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ (与式)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

## 第118回

- (1)  $\frac{11}{5}$   
(2)  $\frac{2}{\pi}$   
(3)  $\frac{5}{72}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

$$\text{ただし } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \Delta x$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= \int_0^1 (3x-1)^5 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} (3x-1)^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{15} (32 - (-1)) = \frac{11}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (与式)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x dx \\ &= \left[ -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ (与式)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(2n+k)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{\left(2 + \frac{k}{n}\right)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(2 + \frac{k}{n}\right)^3} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^3} \\ &= \left[ -\frac{1}{2(2+x)^2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{72} \end{aligned}$$

## 第119回

- (1)  $\frac{1}{2}$   
(2) 2  
(3)  $\frac{1}{9}$   
(4)  $\frac{1}{2}$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{(n+1)(n+3)}\}^2 - \{\sqrt{n(n+2)}\}^2}{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+4n+3) - (n^2+2n)}{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 \cdot 1} + \sqrt{1}} = 1 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ (与式)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$\begin{aligned} (3) \quad &\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{2x^2-x-1} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{(2x+1) - (x+2)}{(x-1)(x+2)(2x+1)} \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x+2)(2x+1)} = \frac{1}{(x+2)(2x+1)} \\ &\text{よって} \\ &\text{(与式)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+2)(2x+1)} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ (与式)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{(x^2+x+4) - (x^2+4)\} \sin 2x}{(\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+4})x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{(\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+4})x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 第120回

- (1)  $-\frac{3}{2}$   
(2)  $\frac{1}{3}$   
(3)  $\frac{1}{2}$   
(4)  $\log 2$

解説

(1)  $x = -t$  とおくと $x \rightarrow -\infty$  のとき  $t \rightarrow \infty$ 

$$\begin{aligned} &\text{よって} \\ &\text{(与式)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2-3t} - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2-3t) - t^2}{\sqrt{t^2-3t} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{t}} + 1} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(2)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1)$ 

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &\text{(与式)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{n^3} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3) (与式)

$$\begin{aligned} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4) (与式)  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}$ 

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) \\ &= \log(1 + \sqrt{1}) = \log 2 \end{aligned}$$



## 第121回

(1)  $-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

(2)  $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

(3)  $-\frac{\tan x}{x} - \frac{\log|\cos x|}{x^2}$

(4)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

解説

(1)  $y' = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

$$= -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

(別解)  $y = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{-(1+x^2)+2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}$

$$= -1 + 2(1+x^2)^{-1}$$

よって

$$y' = 2 \cdot (-1+x^2)^{-2} \cdot (1+x^2)'$$

$$= -2(1+x^2)^{-2} \cdot 2x$$

$$= -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

(2)  $y' = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

(3)  $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot x - \log|\cos x| \cdot 1$

$$= -x \cdot \tan x - \log|\cos x|$$

$$= -\frac{x \cdot \tan x - \log|\cos x|}{x^2}$$

$$= -\frac{\tan x}{x} - \frac{\log|\cos x|}{x^2}$$

$$= -\frac{\tan x}{x} - \frac{\log|\cos x|}{x^2}$$

(4)  $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right)$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

## 第122回

(1)  $-\frac{2}{\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}(x+2)}$

(2)  $(e^x + e^{-x})(\cos x - \sin x)$

(3)  $\frac{1}{x(\log x + 1)^2}$

(4)  $\frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$

解説

(1)  $y' = \frac{1}{2} \left( \frac{2-x}{x+2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1 \cdot (x+2) - (2-x) \cdot 1}{(x+2)^2}$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+2}{2-x}} \cdot \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}(x+2)}$$

(2)  $y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$$+ e^x \cos x + e^x (-\sin x)$$

$$= (e^x + e^{-x})(\cos x - \sin x)$$

(3)  $y' = \frac{1}{x} \cdot (\log x + 1) - (\log x) \cdot \frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{x(\log x + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(\log x + 1)^2}$$

(4)  $2 + \sin x > 0, 2 - \sin x > 0$  であるから

$$y = \log(2 + \sin x) - \log(2 - \sin x)$$

よって

$$y' = \frac{\cos x}{2 + \sin x} - \frac{-\cos x}{2 - \sin x}$$

$$= \frac{\cos x(2 - \sin x) + \cos x(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)(2 - \sin x)}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{4\cos x}{4 - \sin^2 x}$$

## 第123回

(1)  $\frac{1}{5}(x^2+x-1)\sqrt{2x+1}+C$

(2)  $\frac{\sqrt{3}}{108}\pi + \frac{1}{24}$

(3)  $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$  (4)  $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$

解説

(1)  $\sqrt{2x+1}=t$  とおくと  $2x+1=t^2$

よって  $x = \frac{t^2-1}{2}$

また  $dx = t dt$  であるから

(与式)  $= \int \left\{ \left( \frac{t^2-1}{2} \right)^2 + \frac{t^2-1}{2} \right\} \cdot \frac{1}{t} \cdot t dt$

$$= \int \frac{t^4-1}{4} dt = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{5} t^5 - t \right) + C$$

$$= \frac{1}{20} (t^4 - 5) + C$$

$$= \frac{1}{20} ((\sqrt{2x+1})^4 - 5) \sqrt{2x+1} + C$$

$$= \frac{1}{5} (x^2+x-1)\sqrt{2x+1} + C$$

(2)  $x = \sqrt{3} \tan \theta$  とおくと

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3+x^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(3(1+\tan^2 \theta))^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24}$$

(3)  $x \geq 0$  のとき  $|xe^x| = xe^x$

$$x \leq 0$$
 のとき  $|xe^x| = -xe^x$

よって

(与式)  $= \int_{-1}^0 (-xe^x) dx + \int_0^1 xe^x dx$

ここで  $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int e^x dx$

$$= e^x(x-1) + C$$

であるから

(与式)  $= -\left[ e^x(x-1) \right]_{-1}^0 + \left[ e^x(x-1) \right]_0^1$

$$= -(-1) + \frac{1}{e} \cdot (-2) + 0 - (-1)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

(4) (与式)  $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+\cos x} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx$$

$$= \left[ 2 \tan \frac{x}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[ \log|1+\cos x| \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (\log 1 - \log \frac{3}{2})$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \frac{3}{2}$$



## 第124回

(1)  $\frac{1}{4} \log|x+1||x-3|^3 + C$

(2)  $\log(\sqrt{2}+1)$

(3)  $-\frac{2}{3} \log 2 + \log 3$  (4)  $\frac{9}{4} \pi$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (与式)} &= \int \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx \\
 &= \int \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-3} \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} (\log|x+1| + 3\log|x-3|) + C \\
 &= \frac{1}{4} \log|x+1||x-3|^3 + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (与式)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx
 \end{aligned}$$

$x$	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
$t$	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x = t$  とおくと  $\cos x dx = dt$   
よって

$$\begin{aligned}
 \text{(与式)} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1-t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \log|1+t| - \log|1-t| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \log \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \log \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2} \log(\sqrt{2}+1)^2 \\
 &= \log(\sqrt{2}+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ (与式)} &= \int_1^3 \left( -\frac{1}{x} \right)' \log(x+1) dx \\
 &= \left[ \left( -\frac{1}{x} \right) \log(x+1) \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx \\
 &= -\frac{\log 4}{3} + \log 2 + \int_1^3 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= -\frac{\log 2}{3} + \left[ \log|x| - \log|x+1| \right]_1^3 \\
 &= -\frac{\log 2}{3} + (\log 3 - \log 4) - (0 - \log 2) \\
 &= -\frac{2}{3} \log 2 + \log 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &6x - x^2 = 9 - (x-3)^2 \\
 &x-3 = 3\sin \theta \text{ とおくと} \\
 &dx = 3\cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$x$	0	$\rightarrow$	3
$\theta$	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

また,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$  のとき  $\cos \theta \geq 0$  であるから

$$\begin{aligned}
 \sqrt{9 - (x-3)^2} &= \sqrt{9 - 9\sin^2 \theta} \\
 &= \sqrt{9\cos^2 \theta} = 3\cos \theta
 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
 \text{(与式)} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (3\cos \theta) \cdot 3\cos \theta d\theta \\
 &= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d\theta = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{9}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4} \pi
 \end{aligned}$$

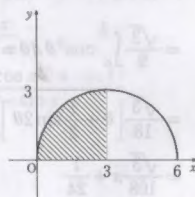
別解  $y = \sqrt{6x - x^2}$  のグラフは, 下の図のような半円を表す。

したがって, 定積分

$$\int_0^3 \sqrt{6x - x^2} dx$$

は右の図の斜線部分の面積に等しいから

$$\text{(与式)} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4} \pi$$



ISBN978-4-410-22643-4

ドリル数Ⅲ 標準  
《解答編》

---

22643A



数研出版

<https://www.chart.co.jp>